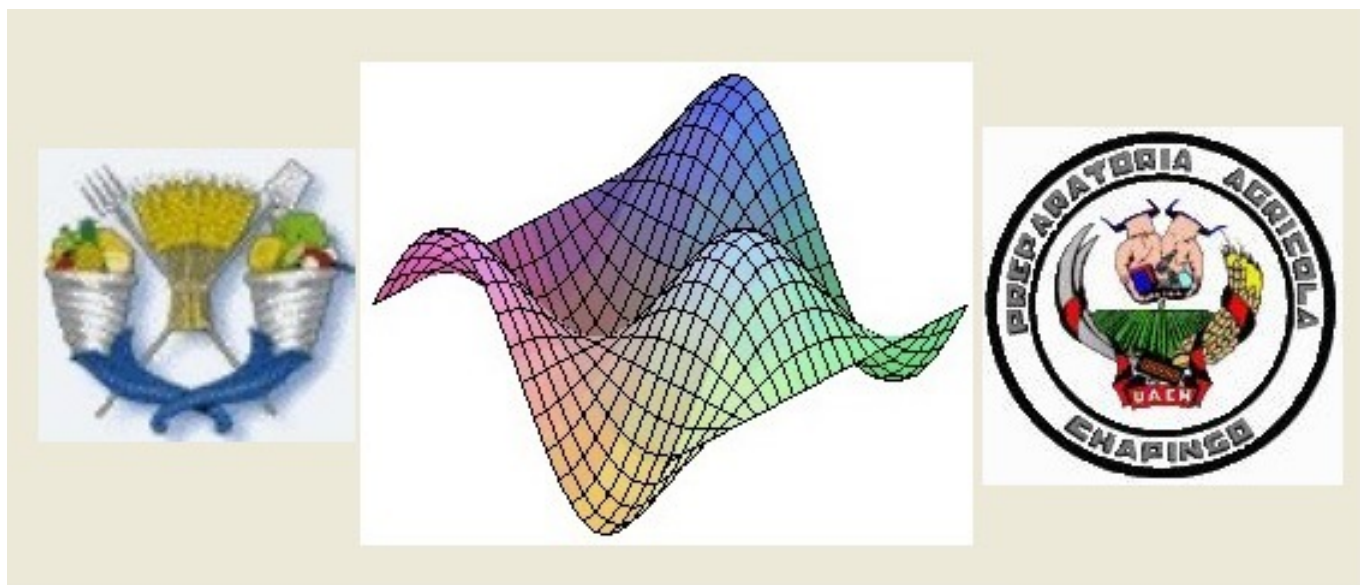


Universidad Autónoma Chapingo

Preparatoria Agrícola
Área de Matemáticas

PROBLEMARIO DE CÁLCULO INTEGRAL
Enero 2025



Elaboró: ACADEMIA DE CÁLCULO/2.
Basado en la propuesta del
Prof. J. Jesús Pérez y Prof. Margarito Soriano.

Índice

0.1. Nota introductoria al estudiante	3	4. Unidad IV: La integral definida	19
1. Unidad I: Diferencial de una función	3	4.1. Evaluación de integrales definidas	19
1.1. Concepto y cálculo de la diferencial	3	4.2. Aplicaciones de la integral definida	20
2. Unidad II: La integral indefinida	3	4.2.1. Área bajo la curva	20
2.1. Integración inmediata	3	4.2.2. Área entre curvas	21
2.2. Integración por cambio de variable simple. Parte I	4	4.2.3. Volumen de sólidos de revolución	21
2.2.1. Potencia de una función	4	5. Unidad V. Métodos de integración. Parte II	23
2.2.2. Integrales que originan un logaritmo natural	5	5.1. Integración de potencias trigonométricas	23
2.2.3. Función exponencial	7	5.2. Integración por sustitución trigonométrica	25
2.2.4. Funciones trigonométricas	7	5.2.1. Caso 1. $f(\sqrt{a^2 - b^2u^2})$	25
2.3. Aplicaciones de la integral indefinida(Opcional)	9	5.2.2. Caso 2. $f(\sqrt{b^2u^2 + a^2})$	25
2.3.1. Integración con condiciones iniciales	9	5.2.3. Caso 3. $f(\sqrt{b^2u^2 - a^2})$	26
2.3.2. Problemas de física. Optativo	10	6. Bibliografía	27
2.3.3. Problemas de economía. Optativo	11		
2.3.4. Problemas generales. Optativo	11		
2.4. Integración por cambio de variable simple. Parte II	13		
2.4.1. Integrales que originan trigonométricas inversas	13		
2.4.2. Otras integrales que originan logaritmo natural	14		
2.4.3. Integrales que contiene raíces de suma y diferencia de cuadrados. Optativo	15		
3. Unidad III. Métodos de Integración. Parte I	15		
3.1. Integración por partes	15		
3.2. Integración por fracciones parciales	17		
3.2.1. Caso 1. Factores lineales diferentes	17		
3.2.2. Caso 2. Factores lineales repetidos	18		

0.1. Nota introductoria al estudiante

Querido estudiante:

El siguiente problemario está pensado para servirte como guía y material de apoyo a lo largo de todo el semestre.

En todos y cada uno de los problemas se proporciona la respuesta, con la idea de auxiliarte cuando elabores tus tareas o estudies para tus exámenes. Recuerda que existen respuestas equivalentes y debes de consultarlas sólo cuando ya has trabajado con el ejercicio.

A lo largo del problemario encontrarás algunos problemas marcados con asterisco. Esto significa varias cosas. (1) Pueden ser ejercicios un poco más difíciles que el promedio. (2) En algunos casos sólo se requiere de una manipulación algebraica antes de pasar a la integración. (3) En otros problemas, es indicativo que la integral en cuestión conducirá a una integral que requiere otro método de integración previamente estudiado. (4) También, el asterisco puede indicar que el ejercicio es largo y engorroso. Esperamos que este material te sea de utilidad y te deseamos mucho éxito en el estudio del Cálculo Integral.

1. Unidad I: Diferencial de una función

1.1. Concepto y cálculo de la diferencial

Calcula el incremento Δy y la diferencial dy para los valores indicados de x y Δx si

1. $f(x) = 3x + 4, x = 2, \Delta x = 1$ Sol: $\Delta y = dy = 3$.
2. $f(x) = x^2, x = 10, \Delta x = 1$ Sol: $\Delta y = 21, dy = 20$.
3. $f(x) = \sqrt{x}, x = 10, \Delta x = 1$ Sol: $\Delta y = 0.1543, dy = 0.1581$.
4. $f(x) = x^{3/2}, x = 4, \Delta x = 0.1$ Sol: $\Delta y = 0.3019, dy = 0.300$.

$$5. f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x = 0, \Delta x = -0.2 \text{ Sol: } \Delta y = -0.0385, dy = 0.$$

$$6. f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}, x = 0, \Delta x = 0.1 \text{ Sol: } \Delta y = -0.2222, dy = -0.2.$$

Calcula la diferencial dy de las siguientes funciones

$$7. f(x) = (x - 5)^2 \quad \text{Sol: } dy = 2(x - 5)dx$$

$$8. f(x) = 3x^2 + 5x - 6 \quad \text{Sol: } dy = (6x + 5)dx$$

$$9. f(x) = \frac{x + 2}{x^2} \quad \text{Sol: } dy = -\frac{x + 4}{x^3}dx$$

$$10. f(x) = e^{4x^2} \quad \text{Sol: } dy = 8xe^{4x^2} dx$$

$$11. f(x) = \ln(2x + 1) \quad \text{Sol: } dy = \frac{2}{2x + 1}dx$$

$$12. f(x) = \sin(x^2 + 2) \quad \text{Sol: } dy = 2x \cos(x^2 + 2)dx$$

$$13. f(x) = \cos(x^3 + 1) \quad \text{Sol: } dy = -3x^2 \sin(x^3 + 1)dx$$

$$14. f(x) = \tan(x^2 + 2) \quad \text{Sol: } dy = 2x \sec^2(x^2 + 2)dx$$

2. Unidad II: La integral indefinida

2.1. Integración inmediata

Calcule las siguientes integrales inmediatas.

$$15. \int (3 - 2x) dx = 3x - x^2 + C$$

$$16. \int (100 - 3x^2) dx = 100x - x^3 + C$$

$$17. \int (x^2 - x^3) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + C$$

$$18. \int \sqrt[3]{8x^7} dx = \frac{3}{5}x^{10/3} + C$$

$$19. \int \sqrt{ax} dx = \frac{2x\sqrt{ax}}{3} + C$$

$$20. \int \frac{4x^2 - 2\sqrt{x}}{x} dx = 2x^2 - 4\sqrt{x} + C$$

$$21. \int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} - 4x^{1/2} + C$$

$$22. \int (x-1)^2 x dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$23. \int (2x+3)^2 dx = \frac{4x^3}{3} + 6x^2 + 9x + C$$

$$24. \int (2x+3)(3x-2) dx = 2x^3 + \frac{5x^2}{2} - 6x + C$$

$$25. \int \frac{-8x^4 + 3x^2 + 9}{3x^3} dx = -\frac{4}{3}x^2 + \ln(x) - \frac{3}{2x^2} + C$$

$$26. \int \left(\frac{5}{x} + 2x^2 - \frac{3}{x^4} \right) dx = 5 \ln(x) + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{x^3} + C$$

$$27. \int \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx = 2a\sqrt{x} + 2\sqrt{ax} + \frac{2x^{3/2}}{3} + C$$

$$28. \int \left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 8h\sqrt[3]{x^2} \right) dx = 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{24}{5}hx^{5/3} + C$$

$$29. \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx = (nx)^{\frac{1}{n}} + C$$

$$30. \int \frac{\sec(x) + \cos(x)}{\cos(x)} dx = \ln |\sec(x)| + x + C$$

$$31. \int (\csc^2(x) - 2e^x) dx = -2e^x - \cot(x) + C$$

$$32. \int (1 + \tan^2(x)) dx = \tan(x) + C$$

$$33. \int \sec(x)(\sec(x) + \tan(x)) dx = \tan(x) + \sec(x) + C$$

2.2. Integración por cambio de variable simple. Parte I

2.2.1. Potencia de una función

Verificar las siguientes integrales usando cambio de variable simple.

$$34. \int \sqrt{3x-1} dx = \frac{2}{9}(3x-1)^{3/2} + C$$

$$35. \int \sqrt{1-4y} dy = -\frac{1}{6}(1-4y)^{3/2} + C$$

$$36. \int \sqrt{a^2 - x^2} x dx = -\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2} + C$$

$$37. \int x^3 \sqrt{2+x^4} dx = \frac{1}{6}(2+x^4)^{3/2} + C$$

$$38. \int x^2 (x^3 - 1)^{10} dx = \frac{1}{33}(x^3 - 1)^{11} + C$$

$$39. \int 2x^3 \sqrt{x^4 + 3} \, dx = \frac{(x^4 + 3)^{3/2}}{3} + C$$

$$40. \int y^3 (1 - 2y^4)^{-5} \, dy = \frac{1}{32(1 - 2y^4)^4} + C$$

$$41. \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 + x^3}} = \frac{2}{3} (a^2 + x^3)^{1/2} + C$$

$$42. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + C$$

$$43. \int \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} \, dx = \frac{2(\sqrt{a} + \sqrt{x})^3}{3} + C$$

$$44. \int \sqrt{1 + \frac{1}{3x}} \cdot \frac{dx}{x^2} = -2 \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3/2} + C$$

$$45. \int \frac{3x^2 - 6}{\sqrt{x^3 - 6x}} \, dx = 2\sqrt{x^3 - 6x} + C$$

$$46. \int \frac{(a + \ln(x))^2}{x} \, dx = \frac{(a + \ln|x|)^3}{3} + C$$

$$47. \int \frac{\sqrt{a + \ln(x)}}{x} \, dx = \frac{2}{3} (a + \ln|x|)^{3/2} + C$$

$$48. * \int (x^2 - 4x + 4)^{4/3} \, dx = \frac{3}{11} (x - 2)^{11/3} + C$$

$$49. \int (e^x + 1)^3 e^x \, dx = \frac{(e^x + 1)^4}{4} + C$$

$$50. \int \frac{e^z + e^{-z}}{\sqrt{e^z - e^{-z}}} \, dz = 2\sqrt{e^z - e^{-z}} + C$$

Para los siguientes tres ejercicios seleccione cuidadosamente el cambio de variable.

$$51. * \int x^2 \sqrt{3 - 2x} \, dx = \frac{-3}{4} (3 - 2x)^{3/2} + \frac{3}{10} (3 - 2x)^{5/2} - \frac{1}{28} (3 - 2x)^{7/2} + C$$

$$52. * \int \frac{x^3}{\sqrt{1 - 2x^2}} \, dx = \frac{-1}{4} (1 - 2x^2)^{1/2} + \frac{1}{12} (1 - 2x^2)^{3/2} + C$$

$$53. * \int \frac{(x + 3)}{(3 - x)^{2/3}} \, dx = \frac{3}{4} (3 - x)^{4/3} - 18(3 - x)^{1/3} + C$$

2.2.2. Integrales que originan un logaritmo natural

$$54. \int \frac{dx}{2x - 3} = \frac{1}{2} \ln |2x - 3| + C$$

$$55. \int \frac{dx}{3x + 2} = \frac{1}{3} \ln |3x + 2| + C$$

$$56. \int \frac{x}{x^2 - 1} \, dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C = \ln \sqrt{x^2 - 1} + C$$

$$57. \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} \, dx = \ln |x^2 + 3x| + C$$

$$58. \int \frac{x + 2}{x^2 + 4x} \, dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 4x| + C$$

$$59. \int \frac{x^2}{1 - 2x^3} \, dx = -\frac{1}{6} \ln |1 - 2x^3| + C$$

$$60. \int \frac{x^2 + 2}{x^3 + 6x - 1} dx = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 6x - 1| + C$$

$$61. \int \frac{x^2 - a^2}{x^3 - 3a^2x} dx = \frac{1}{3} \ln |x^3 - 3a^2x| + C$$

$$62. \int \frac{5x^2}{10x^3 + 15} dx = \frac{1}{6} \ln |10x^3 + 15| + C$$

$$63. \int \frac{5bx}{8a - 6bx^2} dx = -\frac{5}{12} \ln |8a - 6bx^2| + C$$

$$64. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = 2 \ln |1 + \sqrt{x}| + C$$

$$65. \int \frac{x^{n-1} - 1}{x^n - nx} dx = \frac{1}{n} \ln |x^n - nx| + C$$

$$66. \int \frac{\text{sen}(x)}{a + b \cos(x)} dx = -\frac{1}{b} \ln |a + b \cos(x)| + C$$

$$67. \int \frac{\sec^2(x)}{1 + 3 \tan(x)} dx = \frac{1}{3} \ln |1 + 3 \tan(x)| + C$$

$$68. \int \frac{1 + \cos(x)}{x + \text{sen}(x)} dx = \ln |x + \text{sen}(x)| + C$$

$$69. \int \frac{\text{sen}(x)}{1 + \cos(x)} dx = -\ln |1 + \cos(x)| + C$$

$$70. \int \frac{\cos(x)}{1 + \text{sen}(x)} dx = \ln |1 + \text{sen}(x)| + C$$

$$71. \int \frac{2e^x}{e^x + 1} dx = 2 \ln |e^x + 1| + C$$

$$72. \int \frac{e^x}{a + be^x} dx = \frac{1}{b} \ln |a + be^x| + C$$

$$73. \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx = \ln \sqrt{e^{2x} + 1} + C$$

Para verificar las siguientes integrales, puede proceder de alguna(s) de las siguientes formas: (1) Mediante un cambio de variable, selecciónelo con cuidado. (2) Realizando la división antes de integrar. (3) Sumando y restando, luego separar el quebrado.

$$74. \int \frac{x + 2}{x + 1} dx = x + \ln |x + 1| + C$$

$$75. \int \frac{2x - 1}{2x + 3} dx = x - 2 \ln |2x + 3| + C$$

$$76. * \int \frac{dx}{e^x + 1} = x - \ln |e^x + 1| + C$$

$$77. * \int \frac{e^{3x}}{e^x - 1} dx = \frac{e^{2x}}{2} + e^x + \ln |e^x - 1| + C$$

$$78. * \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = 2 \ln |e^x + 1| - x + C$$

$$79. * \int \frac{ae^x + b}{ae^x - b} dx = 2 \ln |ae^x - b| - x + C$$

2.2.3. Función exponencial

Verificar las siguientes integrales usando cambio de variable simple.

$$80. \int e^{5x} dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

$$81. \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

$$82. \int \frac{1}{e^x} dx = -e^{-x} + C$$

$$83. \int e^{\frac{x}{n}} dx = ne^{\frac{x}{n}} + C$$

$$84. \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$85. \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$86. \int \frac{e^{\sqrt{x}} - 3}{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} - 6\sqrt{x} + C$$

$$87. \int e^{\operatorname{sen}(x)} \cos(x) dx = e^{\operatorname{sen} x} + C$$

$$88. \int e^{2\cos(x)} \operatorname{sen}(x) dx = -\frac{e^{2\cos x}}{2} + C$$

$$89. \int e^{3\cos(2x)} \operatorname{sen}(2x) dx = -\frac{e^{3\cos(2x)}}{6} + C$$

$$90. \int e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} dx = a(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) + C$$

$$91. \int (e^x + 1)^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$$

$$92. \int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx = e^{\tan x} + C$$

$$93. \int a^{2x} dx = \frac{1}{2\ln(a)} a^{2x} + C$$

$$94. \int 10^{3x} - 10^{-3x} dx = \frac{10^{3x} + 10^{-3x}}{3\ln(10)} + C$$

$$95. \int x \cdot 2^{x^2} dx = \frac{2^{x^2-1}}{\ln(2)} + C$$

$$96. \int \frac{7^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2 \cdot 7^{\sqrt{x}}}{\ln(7)} + C$$

$$97. \int \frac{k^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx = \frac{k^{\tan(x)}}{\ln(k)} + C$$

2.2.4. Funciones trigonométricas

Verificar las siguientes integrales que involucran funciones trigonométricas.

$$98. \int \cos(5\theta) d\theta = \frac{1}{5} \operatorname{sen}(5\theta) + C$$

$$99. \int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) dx = -2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$100. \int \cos(3x) dx = \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + C$$

$$101. \int \tan(2x) dx = \frac{1}{2} \ln |\sec(2x)| + C$$

$$102. \int \frac{1}{2} x \operatorname{sen}(4x^2) dx = -\frac{1}{16} \cos(4x^2) + C$$

$$103. \int x \cot(x^2) dx = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{sen}(x^2)| + C$$

$$104. \int x^2 \operatorname{sen}(x^3 + 4) dx = -\frac{1}{3} \cos(x^3 + 4) + C$$

$$105. \int x \operatorname{sen}(x^2 + 5) dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 5) + C$$

$$106. \int \frac{\operatorname{sen}(\ln(x))}{x} dx = -\cos(\ln(x)) + C$$

$$107. \int e^x \cos(e^x) dx = \operatorname{sen} e^x + C$$

$$108. \int \operatorname{sen}(ax) \cos(ax) dx = \frac{\operatorname{sen}^2(ax)}{2a} + C = -\frac{\cos^2(ax)}{2a} + C$$

$$109. \int \operatorname{sen}(2x) \cos^2(2x) dx = -\frac{\cos^3(2x)}{6} + C$$

$$110. \int \operatorname{sen}^3(x) \cos(x) dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^4(x) + C$$

$$111. \int \operatorname{sen}^2(x) \cos(x) dx = \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3} + C$$

$$112. \int \cos(x)(2 + \operatorname{sen}(x))^5 dx = \frac{1}{6}(2 + \operatorname{sen}(x))^6 + C$$

$$113. \int 2 \operatorname{sen}(x) \sqrt[3]{1 + \cos(x)} dx = -\frac{3}{2}(1 + \cos(x))^{4/3} + C$$

$$114. \int \frac{\sec(x) \tan(x)}{a + b \sec(x)} dx = \frac{1}{b} \ln |a + b \sec(x)| + C$$

$$115. \int \sec(x) \tan(x) \cos(\sec(x)) dx = \operatorname{sen}(\sec(x)) + C$$

$$116. \int x \csc(3x^2) \cot(3x^2) dx = -\frac{\csc(3x^2)}{6} + C$$

$$117. \int \frac{\sec^2(\ln(x))}{2x} dx = \frac{\tan(\ln(x))}{2} + C$$

$$118. \int \frac{x}{\operatorname{sen}^2(x^2)} dx = -\frac{\cot(x^2)}{2} + C$$

$$119. \int (\tan(2x) + \cot(2x))^2 dx = \frac{\tan(2x) - \cot(2x)}{2} + C$$

$$120. \int (\cot(5x) + \csc(5x)) dx = \frac{\ln |1 - \cos(5x)|}{5} + C$$

$$121. \int (\tan(2x) - \sec(2x)) dx = -\frac{\ln |\operatorname{sen}(2x) + 1|}{2} + C$$

$$122. * \int \frac{dx}{1 + \cos(x)} = -\cot(x) + \csc(x) + C$$

$$123. * \int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen}(x)} = \tan(x) + \sec(x) + C$$

2.3. Aplicaciones de la integral indefinida(Opcional)

Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay un grano de descubrimiento en la solución de cualquier problema.

George Polya

Resolver los siguientes problemas usando integración indefinida.

2.3.1. Integración con condiciones iniciales

124. Si y es una función de x tal que $y' = 8x - 4$; $y(2) = 5$, encontrar y . Encontrar también $y(4)$.

$$\text{Resp. } y = 4x^2 - 4x - 3; y(4) = 45.$$

125. Determina la función cuya pendiente es $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$ que pasa por el punto $(2, 4)$.

$$\text{Resp. } y = f(x) = x^3 - x - 2.$$

126. El punto $(3, 2)$ está en una curva, y en cualquier punto (x, y) de la curva la recta tangente tiene una pendiente igual a $2x - 3$. Determine la ecuación de la curva.

$$\text{Resp. } y = x^2 - 3x + 2.$$

127. La pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) de una curva es $3\sqrt{x}$. Si el punto $(9, 4)$ está en la curva, obtenga la ecuación de la misma.

$$\text{Resp. } y = 2x^{3/2} - 50.$$

128. Los puntos $(-1, 3)$ y $(0, 2)$ están en una curva, y en cualquier punto (x, y) de la curva $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 4x$. Determine la ecuación de la curva.

Sugerencia considere $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx}$, y obtenga una ecuación que contenga a y' , x y la constante C_1 . A partir de esta ecuación determine otra ecuación que involucre a y , x , C_1 y C_2 . Calcule C_1 y C_2 a partir de las condiciones.

$$\text{Resp. } y = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x + 2$$

129. Dado que $y'' = x^2 - 6$; $y'(0) = 2$; $y(1) = -1$ encontrar y . Considere la sugerencia del problema 128.

$$\text{Resp. } y = \frac{1}{12}x^4 - 3x^2 + 2x - \frac{1}{12}.$$

130. La ecuación de la recta tangente a una curva en el punto $(1, 3)$ es $y = x + 2$. Si en cualquier punto (x, y) de la curva, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$, obtenga una ecuación de la curva. Considere la sugerencia del problema 128.

$$\text{Resp. } y = x^3 - 2x + 4$$

131. En cualquier punto (x, y) de una curva, $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - x^2$, y una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1, 1)$ es $y = 2 - x$. Determine una ecuación de la curva. Considere la sugerencia del problema 128.

$$\text{Resp. } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{3}x + \frac{9}{4}$$

132. * En cualquier punto (x, y) de una curva $\frac{d^3y}{dx^3} = 2$; el punto $(1, 3)$ es un punto de inflexión en el cual la pendiente de la recta tangente en el punto de inflexión es -2 . Obtenga la ecuación de la curva.

$$\text{Resp. } y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + \frac{14}{3}.$$

2.3.2. Problemas de física. Optativo

133. Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies por segundo a partir de una altura inicial de 80 pies.

- a) Encontrar la función posición que expresa la altura s en función del tiempo t .
b) ¿Cuándo llegará la pelota al suelo?

$$\text{Resp. a. } s(t) = -16t^2 + 64t + 80, \text{ b. } t = 5 \text{ seg.}$$

134. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 20 m/s. Conteste

- a) ¿Cuánto tiempo ascenderá la pelota?
b) ¿Qué tan alto llegará la pelota?
c) ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en llegar al suelo?

$$\text{Resp. a. } 2.039 \text{ s. , b. } 20.387 \text{ m. , c. } 4.077 \text{ s.}$$

135. Se deja caer una piedra desde lo alto de un edificio de 45 m de altura. Conteste:

- a) ¿Cuánto tiempo le tomará a la piedra alcanzar el suelo?
b) ¿Con qué rapidez golpeará la pelota el suelo?

$$\text{Resp. a. } 3.029 \text{ s. , b. } 29.714 \text{ m/s hacia abajo.}$$

136. Flujo de un fluido. En el estudio del flujo de un fluido en un tubo de radio constante R , tal como la sangre en ciertas partes del cuerpo , puede considerarse que el tubo consiste en tubos concéntricos de radio r_0 , donde $0 \leq r_0 \leq R$. La velocidad v del fluido es una función de r y está dada por

$$v = \int -\frac{(P_1 - P_2)r}{2l\eta} dr,$$

donde P_1 y P_2 son las presiones en los extremos del tubo, η es la viscosidad del fluido y l es la longitud del tubo. Si $v = 0$ cuando $r_0 = R$ demuestre que

$$v = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4l\eta}$$

137. Ley de enfriamiento de Newton. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 150°C . Tres minutos después, su temperatura es de 90°C . a. Determinar la temperatura del pastel para cualquier instante posterior a su salida del horno, si la temperatura del ambiente es de 20°C . b. ¿Qué temperatura aproximada tendrá el pastel después de un tiempo considerable?

$$\text{Resp. a. } T(t) = 20 + 130e^{-0.2063t}, \text{ b. } 20^\circ\text{C.}$$

2.3.3. Problemas de economía. Optativo

138. Si la función de ingreso marginal para el producto de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = 2000 - 20q - 3q^2,$$

donde r es la función de ingreso y q es el número de unidades producidas. Encontrar la función de demanda. Considera que cuando no se ha vendido ninguna unidad, el ingreso total es cero. Recuerda que la función de demanda p que es función de q está dada por $p = r/q$

$$\text{Resp. } p = 2000 - 10q - q^2$$

139. Elasticidad de la demanda. El único productor de cierto artículo ha determinado que la función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = 100 - 3q^2.$$

Encuentre la elasticidad puntual de la demanda para el producto cuando $q = 5$. Sugerencia: encuentre primero la función de demanda. Recuerda que si $p = f(q)$ es la función de demanda, la elasticidad puntual de la demanda está dada por $\eta = \frac{1}{\frac{dp}{dq}} \frac{p}{q}$

140. Costo promedio. Un fabricante ha determinado que la función de costo marginal es

$$\frac{dc}{dq} = 0.003q^2 - 0.4q + 40,$$

donde q es el número de unidades producidas. Si el costo marginal es de \$ 27.50 cuando $q = 50$ y los costos fijos son de \$ 5000, ¿cuál es el costo promedio de producir 100 unidades? Recuerda que: costo promedio = $\frac{\text{costo total}}{\text{unidad}}$, es decir $\bar{c} = \frac{c}{q}$

Resp. \$ 80

2.3.4. Problemas generales. Optativo

141. Crecimiento exponencial. Un cultivo tiene inicialmente un número N_0 de bacterias. Para $t = 1$ hora, el número de bacterias medido es de $\frac{3}{2}N_0$. Si la rapidez de reproducción se supone proporcional al número de bacterias presentes en un momento dado. a. Determinar el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique. b. ¿Depende este tiempo del número inicial de bacterias?

Resp. a. 2.7 hrs , b. No.

142. Para un grupo urbano particular, algunos sociólogos estudiaron el ingreso anual promedio actual y (en dólares) que una persona con x años de educación puede esperar recibir al buscar un empleo ordinario. Ellos estimaron que la razón a la que el ingreso cambia con respecto a la educación está dada por

$$\frac{dy}{dx} = 100x^{3/2}, \quad 4 \leq x \leq 16$$

donde $y = 28720$ cuando $x = 9$. Encontrar y .

Resp. $y = 40x^{5/2} + 19000$.

143. La matrícula de cierta escuela se ha incrementado a una tasa de $1000(t+1)^{-1/2}$ estudiantes por año desde el 2000. Si la matrícula en 2003 fue de 10000 alumnos. Responder

a) ¿Cuál fue la matrícula en el 2000?

- b) ¿Cuál es la matrícula esperada para el 2008, si se supone que se incrementará a la misma tasa?

Resp. a. 8000 , b. 12000.

144. Dieta para ratas. Un grupo de biólogos estudió los efectos alimenticios en ratas a las que se alimentó con una dieta en la que 10 % era proteína. La proteína consistió en levadura y harina de maíz. El grupo encontró que en cierto periodo, la razón de cambio aproximada del aumento promedio de peso G (en gramos) de una rata, con respecto al porcentaje P de levadura en la mezcla proteica fue

$$\frac{dG}{dP} = -\frac{P}{25} + 2, \quad 0 \leq P \leq 100.$$

Si $G = 38$ cuando $P = 10$, encuentre G .

Resp. $G = -\frac{P^2}{50} + 2P + 20$

145. Una herida cicatriza en tal forma que t días después del lunes, el área de la herida ha venido decreciendo a razón $-3(t+2)^{-2}$ cm² por día. Si para el martes el área de la herida era de 2 cm²,

- a) ¿cuál era el área de la herida el lunes? y
b) ¿cuál es el área anticipada de la citada herida para el viernes si continúa cicatrizando con la misma rapidez?

Resp. a. 5/2, b. 3/2

146. Polilla de invierno. En Nueva Escocia se llevó a cabo un estudio acerca de la polilla de invierno. Las larvas de la polilla caen al suelo de los árboles huéspedes. Se encontró que la razón (aproximada)

con que la densidad y (número de larvas por pie cuadrado de suelo) cambia con respecto a la distancia x (en pies), desde la base del árbol huésped es

$$\frac{dy}{dx} = -1.5 - x, \quad 1 \leq x \leq 9.$$

Si $y = 57.3$ cuando $x = 1$, encuentre y .

147. * Los psicólogos interesados en la teoría del aprendizaje estudian las curvas de aprendizaje. Una curva de aprendizaje es la gráfica de una función $P(t)$, el rendimiento de alguien que aprende una habilidad como función del tiempo t de capacitación. La derivada dP/dt representa la rapidez a la cual cualquier mejora el rendimiento.

- a) ¿ Cuándo piensa que P crece con la mayor rapidez?
b) Si M es el nivel máximo del rendimiento que puede dar el aprendizaje, explique por qué la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P); \quad \text{siendo } k \text{ una constante positiva,}$$

es un modelo razonable para el aprendizaje.

- c) Encuentre $P(t)$, considerando que $P = 0$ cuando $t = 0$, e interprete.

148. * Una solución de glucosa se administra por vía intravenosa en la sangre a un ritmo constante r . A medida que se añade la glucosa, esta se convierte en otras sustancias y se elimina de la concentración sanguínea a una velocidad que es proporcional a la concentración en ese tiempo. Por lo tanto un modelo para la concentración $C = C(t)$ de la glucosa en el torrente sanguíneo es

$$\frac{dC}{dt} = r - kC; \quad \text{donde } k \text{ es una constante positiva.}$$

- a) Suponga que la concentración al tiempo $t = 0$ es 100 mg/dl. Determine la concentración en cualquier tiempo, resolviendo la ecuación diferencial
- b) Asumiendo que $160 < \frac{r}{k}$ encuentre $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$ e interprete el resultado.

2.4. Integración por cambio de variable simple. Parte II

2.4.1. Integrales que originan trigonométricas inversas

Para empezar, resolver las siguientes integrales inmediatas.

$$149. \int \frac{dx}{x^2 + 9} = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$$150. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

$$151. \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Compruebe las siguientes integrales por medio de cambio de variable simple.

$$152. \int \frac{dx}{4x^2 + 9} = \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

$$153. \int \frac{x}{x^4 + 3} dx = \frac{\sqrt{3}}{6} \arctan\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$154. \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 9}} = \frac{1}{3} \operatorname{arcsec}\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

$$155. \int \frac{dx}{\sqrt{25 - 16x^2}} = \frac{1}{4} \arcsin\left(\frac{4x}{5}\right) + C$$

$$156. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 - 1}} = \frac{1}{2} \operatorname{arcsec}(x^2) + C$$

Para los siguientes ejercicios se requiere completar el trinomio cuadrado perfecto.

$$157. \int \frac{dx}{x^2 + 10x + 30} = \frac{\sqrt{5}}{5} \arctan\left(\frac{\sqrt{5}(x+5)}{5}\right) + C$$

$$158. \int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x-4}{3}\right) + C$$

$$159. \int \frac{dz}{2z^2 + 2z + 5} = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{2z+1}{3}\right) + C$$

$$160. \int \frac{dx}{\sqrt{20 + 8x - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x-4}{6}\right) + C$$

$$161. \int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1} = \arctan(2x - 1) + C$$

$$162. \int \frac{dx}{\sqrt{28 - 12x - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x+6}{8}\right) + C$$

$$163. \int \frac{dx}{2x - x^2 - 10} = -\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$$

Para los siguientes ejercicios se requiere separar la fracción.

$$164. \int \frac{2x-7}{x^2+9} dx = \ln(x^2+9) - \frac{7}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$$165. \int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + 3 \arcsin(x) + C$$

$$166. \int \frac{4x+5}{4x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(4x^2+1) + \frac{5}{2} \arctan(2x) + C$$

Verificar las siguientes integrales indefinidas

$$167. \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \arctan(e^x) + C$$

$$168. \int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} dx = \frac{1}{2} \arctan(e^{2x}) + C$$

$$169. \int \frac{\sec(z) \tan(z)}{9+4\sec^2(z)} dz = \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{2\sec(z)}{3}\right) + C$$

$$170. \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) - 6\sin(x) + 12} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sin(x)-3}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$171. * \int \frac{2x+5}{x^2+2x+5} dx = \ln|x^2+2x+5| + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

$$172. * \int \frac{u+1}{u^2-4u+8} du = \frac{1}{2} \ln(u^2-4u+8) + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{u-2}{2}\right) + C$$

$$173. * \int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx = -\sqrt{5-4x-x^2} + \arcsin\left(\frac{x+2}{3}\right) + C$$

2.4.2. Otras integrales que originan logaritmo natural

Verificar las siguientes integrales inmediatas.

$$174. \int \frac{dw}{w^2-4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{w-2}{w+2} \right| + C$$

$$175. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-36}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2-36} \right| + C$$

Verificar las siguientes integrales por medio de cambio de variable simple.

$$176. \int \frac{dx}{25-16x^2} = \frac{1}{40} \ln \left| \frac{5+4x}{5-4x} \right| + C$$

$$177. \int \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}} = \ln \left| x+2+\sqrt{4x+x^2} \right| + C$$

$$178. \int \frac{dx}{81-16x^2} = \frac{1}{72} \ln \left| \frac{9+4x}{4x-9} \right| + C$$

$$179. \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-25}} = \frac{1}{3} \ln \left| 3x+\sqrt{9x^2-25} \right| + C$$

$$180. \int \frac{dx}{9x^2-16} = \frac{1}{24} \ln \left| \frac{3x-4}{3x+4} \right| + C$$

$$181. \int \frac{dw}{36w^2-25} = \frac{1}{60} \ln \left| \frac{6w-5}{6w+5} \right| + C$$

$$182. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2} \ln \left| 2x+\sqrt{4x^2+9} \right| + C$$

$$183. \int \frac{c dx}{b^2x^2-a^2} = \frac{c}{2ab} \ln \left| \frac{bx-a}{bx+a} \right| + C$$

Para los siguientes ejercicios se requiere completar el trinomio cuadrado perfecto.

$$184. \int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x+4} \right| + C$$

$$185. \int \frac{dx}{3-2x-x^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+3}{x-1} \right| + C$$

$$186. \int \frac{dr}{4r-r^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{r}{r-4} \right| + C$$

Verificar las siguientes integrales indefinidas

$$187. \int \frac{\cos(x) dx}{16-4\sin^2(x)} = \frac{1}{16} \ln \left| \frac{2\sin(x)+1}{2\sin(x)-1} \right| + C$$

$$188. * \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}} dx = \sqrt{x^2+9} + 2 \ln \left| x + \sqrt{x^2+9} \right| + C$$

$$189. * \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx = \sqrt{x^2+2x-3} + \ln \left| x+1 + \sqrt{x^2+2x-3} \right| + C$$

2.4.3. Integrales que contiene raíces de suma y diferencia de cuadrados. Optativo

$$190. \int \sqrt{25-r^2} dr = \frac{1}{2} r \sqrt{25-r^2} + \frac{25}{2} \arcsin \left(\frac{r}{5} \right) + C$$

$$191. \int \sqrt{3-4x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{3-4x^2} + \frac{3}{4} \arcsin \left(\frac{2x\sqrt{3}}{3} \right) + C$$

$$192. \int \sqrt{x^2-36} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-36} - 18 \ln \left| x + \sqrt{x^2-36} \right| + C$$

$$193. \int \sqrt{3x^2+5} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{3x^2+5} + \frac{5\sqrt{3}}{6} \ln \left| \sqrt{3}x + \sqrt{3x^2+5} \right| + C$$

$$194. \int \sqrt{3-2x-x^2} dx = \frac{x+1}{2} \sqrt{3-2x-x^2} + 2 \arcsin \left(\frac{x+1}{2} \right) + C$$

3. Unidad III. Métodos de Integración. Parte I

Si se atasca en un problema de cálculo y no sabe qué otra cosa hacer, intente integrar por partes o cambiar de variables.

Jerry Kazdan

A diferencia del cálculo de derivadas, no existe un procedimiento infalible que permita calcular la primitiva de una función, suponiendo que exista. Existen no obstante, diferentes técnicas para integrar algunos tipos de funciones. Las técnicas más habituales son:

- Integración por cambio de variable simple
- Integración por partes
- Integración por fracciones parciales
- Integración de potencias trigonométricas
- Integración por sustitución trigonométrica

3.1. Integración por partes

Aplicar la técnica de integración por partes para verificar las siguientes integrales.

$$195. \int x e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$196. \int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{9} x^3 + C$$

$$197. \int \frac{\ln(y)}{y^3} dy = -\frac{\ln(y)}{2y^2} - \frac{1}{4y^2} + C$$

$$198. \int \frac{\ln(u)}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} \ln(u) - 4\sqrt{u} + C$$

$$199. \int t \operatorname{sen}(t) dt = -t \cos(t) + \operatorname{sen}(t) + C$$

$$200. \int x \cos(2x) dx = \frac{x \operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + C$$

$$201. \int x \operatorname{sen}(ax) dx = -\frac{x \cos(ax)}{a} + \frac{\operatorname{sen}(ax)}{a^2} + C$$

$$202. \int z \sec(z) \tan(z) dz = z \sec(z) - \ln |\sec(z) + \tan(z)| + C$$

$$203. \int xa^x dx = \frac{a^x}{\ln^2(a)} (x \ln(a) - 1) + C$$

$$204. \int z \ln(z+1) dz = \frac{(z^2-1)}{2} \ln(z+1) - \frac{z^2}{4} + \frac{z}{2} + C$$

$$205. \int \ln(y^2+2) dy = y \ln(y^2+2) - 2y + 2\sqrt{2} \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$206. \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$$

$$207. \int z\sqrt{1+z} dz = \frac{2}{3}z(z+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(z+1)^{5/2} + C$$

$$208. \int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$209. \int x \arctan(x) dx = \frac{1}{2}(x^2+1) \arctan(x) - \frac{1}{2}x + C$$

$$210. * \int \operatorname{sen}^2(x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$$

$$211. * \int \sec^3(y) dy = \frac{1}{2}\sec(y) \tan(y) + \frac{1}{2} \ln |\sec(y) + \tan(y)| + C$$

Para verificar las siguientes integrales será necesario aplicar el método de integración por partes dos veces.

$$212. \int x^2 \operatorname{sen}(x) dx = -x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + C$$

$$213. \int (z^2+5z+6) \cos(2z) dz = \left(\frac{z}{2} + \frac{5}{4}\right) \cos(2z) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{5z}{2} + \frac{11}{4}\right) \operatorname{sen}(2z) + C$$

$$214. \int x^2 e^{4x} dx = \frac{e^{4x}}{32} (8x^2 - 4x + 1) + C$$

$$215. \int (\ln(x))^2 dx = x(\ln(x))^2 - 2x \ln(x) + 2x + C$$

$$216. ** \int x^2 \arcsin(x) dx = \frac{x^3}{3} \arcsin(x) + \frac{(x^2+2)}{9} \sqrt{1-x^2} + C$$

Para verificar las siguientes tres integrales será necesario aplicar integración por partes dos veces y despejar.

$$217. \int e^z \operatorname{sen}(z) dz = \frac{e^z}{2} (\operatorname{sen}(z) - \cos(z)) + C$$

$$218. \int e^{-x} \cos(2x) dx = \frac{e^{-x}}{5} (2 \operatorname{sen}(2x) - \cos(2x)) + C$$

$$219. \int \operatorname{sen}(\ln(x)) dx = \frac{x}{2} (\operatorname{sen}(\ln(x)) - \cos(\ln(x))) + C$$

$$220. \int \sin(x) \sin(3x) dx = \frac{1}{8} \sin(3x) \cos(x) - \frac{3}{8} \sin(x) \cos(3x) + C$$

$$221. \int e^{3x} \sin(5x) dx = \frac{e^{3x}}{34} (3 \cos(5x) + 5 \sin(5x)) + C$$

Verificar las siguientes integrales

$$222. * \int z^3 e^{z^2} dz = \frac{1}{2} z^2 e^{z^2} - \frac{1}{2} e^{z^2} + C$$

$$223. * \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^2}{3} (1-x^2)^{1/2} - \frac{2}{3} (1-x^2)^{1/2} + C$$

$$224. * \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx = \frac{e^x}{1+x} + C$$

Fórmulas de reducción. Optativo

Use integración por partes para demostrar las siguientes fórmulas de reducción.

$$225. \int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx + C$$

$$226. \int (\ln(x))^n dx = x (\ln(x))^n - n \int (\ln(x))^{n-1} dx + C$$

$$227. \int t^n \sin(t) dt = -t^n \cos(t) + n \int t^{n-1} \cos(t) dt + C$$

$$228. \int x^n \cos(x) dx = x^n \sin(x) - n \int x^{n-1} \sin(x) dx + C$$

$$229. \int \cos^n(\theta) d\theta = \frac{1}{n} \cos^{n-1}(\theta) \sin(\theta) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(\theta) d\theta + C$$

Use las fórmulas de reducción obtenidas anteriormente para determinar las siguientes integrales.

$$230. \int x^4 e^x dx = e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$$

$$231. \int (\ln(x))^3 dx = x \ln^3(x) - 3x \ln^2(x) + 6x \ln(x) - 6x + C$$

$$232. \int x^3 \sin(x) dx = -x^3 \cos(x) + 3x^2 \sin(x) + 6x \cos(x) - 6 \sin(x) + C$$

$$233. \int \cos^4(w) dw = \frac{1}{4} \cos^3(w) \sin(w) + \frac{3}{8} \cos(w) \sin(w) + \frac{3}{8} w + C$$

3.2. Integración por fracciones parciales

Verificar las siguientes integrales usando el método de fracciones parciales.

3.2.1. Caso 1. Factores lineales diferentes

$$234. \int \frac{6x-15}{x^2-3x} dx = 5 \ln(x) + \ln(x-3) + C$$

$$235. \int \frac{7x-1}{x^2-x-6} dx = 3 \ln(x+2) + 4 \ln(x-3) + C$$

$$236. \int \frac{z+16}{z^2+2z-8} dz = 3 \ln(z-2) - 2 \ln(z+4) + C$$

$$237. \int \frac{3w}{w^2 - 2w - 3} dw = \frac{3 \ln(w+1)}{4} + \frac{9 \ln(w-3)}{4} + C$$

$$238. \int \frac{7x - 10}{2x^2 - 7x - 4} dx = \frac{3 \ln(2x+1)}{2} + 2 \ln(x-4) + C$$

$$239. \int \frac{x^2 - 2}{x^3 - 4x} dx = \frac{\ln(x+2)}{4} + \frac{\ln(x)}{2} + \frac{\ln(x-2)}{4} + C$$

$$240. \int \frac{z^2 + 2z + 3}{z(z-1)(z+1)} dz = \ln(z+1) - 3 \ln(z) + 3 \ln(z-1) + C$$

$$241. \int \frac{4y^2 - y - 8}{y^3 - y^2 - 2y} dy = -\ln(y+1) + 4 \ln(y) + \ln(y-2) + C$$

$$242. \int \frac{x+1}{x^3 + 5x^2 - 6x} dx = -\frac{5 \ln(x+6)}{42} - \frac{\ln(x)}{6} + \frac{2 \ln(x-1)}{7} + C$$

3.2.2. Caso 2. Factores lineales repetidos

$$243. \int \frac{3w+2}{w^2(w+1)} dw = -\ln(w+1) + \ln(w) - \frac{2}{w} + C$$

$$244. \int \frac{y^2 - 2y + 4}{y(y-2)^2} dy = \ln(y) - \frac{2}{y-2} + C$$

$$245. \int \frac{2x-4}{(x+1)(x-1)^2} dx = -\frac{3 \ln(x+1)}{2} + \frac{3 \ln(x-1)}{2} + \frac{1}{x-1} + C$$

$$246. \int \frac{x}{(x-3)(x+1)^2} dx = -\frac{3 \ln(x+1)}{16} + \frac{3 \ln(x-3)}{16} - \frac{1}{4x+4} + C$$

$$247. \int \frac{2w^2 - 25w - 33}{(w-5)(w+1)^2} dw = 5 \ln(w+1) - 3 \ln(w-5) - \frac{1}{w+1} + C$$

$$248. \int \frac{3x^2 + 2x - 4}{(x+1)^3} dx = 3 \ln(x+1) + \frac{8x+11}{2x^2+4x+2} + C$$

$$249. \int \frac{x-2}{x^3 - 2x^2 + x} dx = -2 \ln(x) + 2 \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + C$$

$$250. * \int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx = -\ln(x) + 2 \ln(x-1) - \frac{x}{x^2 - 2x + 1} + C$$

$$251. * \int \frac{6w-1}{w^3(2w-1)} dw = 8 \ln(2w-1) - 8 \ln(w) + \frac{8w-1}{2w^2} + C$$

4. Unidad IV: La integral definida

4.1. Evaluación de integrales definidas

Verifique las siguientes integrales definidas.

$$252. \int_1^5 (100 - 3z^2) dz = 276$$

$$253. \int_{-1}^1 (x^2 - x^3) dx = \frac{2}{3}$$

$$254. \int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \frac{10}{9}$$

$$255. \int_{-1}^1 (2x^2 - x^3) dx = \frac{4}{3}$$

$$256. \int_0^1 \sqrt[3]{8x^7} dx = \frac{3}{5}$$

$$257. \int_4^9 \frac{t-3}{\sqrt{t}} dt = \frac{20}{3}$$

$$258. \int_0^1 (2x-3)(5x+1) dx = -\frac{37}{6}$$

$$259. \int_0^1 \frac{z^2}{(1+z^3)^2} dz = \frac{1}{6}$$

$$260. \int_0^3 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2} \ln(3)$$

$$261. \int_1^2 \frac{w+1}{\sqrt{w^2+2w}} dw \approx 1.10$$

$$262. \int_0^2 x^2 \sqrt{x^3+1} dx = \frac{52}{9}$$

$$263. \int_{-2}^3 e^{-x/2} dx = 4.99$$

$$264. \int_1^9 \frac{dt}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^2} = \frac{1}{2}$$

$$265. \int_6^8 \frac{t}{\sqrt{t^2-25}} dt = \sqrt{39}$$

Verifique el valor de las siguientes integrales definidas que involucran funciones trascendentales.

$$266. \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\cos x}{(x+\operatorname{sen} x)^2} dx = \frac{2(2\pi+3)}{(\pi+2)(\pi+3)}$$

$$267. \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos u} \operatorname{sen} u du = \frac{2}{3}$$

$$268. \int_1^4 \frac{\cos \sqrt{y}}{2\sqrt{y}} dy = \operatorname{sen}(2) - \operatorname{sen}(1)$$

$$269. \int_{1/2}^{e/2} \frac{(\ln(2t))^5}{t} dt = \frac{1}{6}$$

$$270. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\arctan(z)(1+z^2)} dz = \ln \frac{4}{3}$$

$$271. \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = 1$$

$$272. \int_0^{\pi/2} \left(\tan^2 \left(\frac{w}{2} \right) + \sec^2 \left(\frac{w}{2} \right) \right) dw = 4 - \frac{\pi}{2}$$

$$273. \int_1^3 \frac{e^{3/s}}{s^2} ds = \frac{e(e^2 - 1)}{3}$$

$$274. \int_0^{1/2} \frac{e^{-2x}}{e^{-2x} + 1} dx = \frac{1}{2} \left(1 - \ln \left(\frac{e+1}{2} \right) \right)$$

$$275. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec x + \tan x)^2 dx = \frac{8 - \pi}{2}$$

Verificar las siguientes integrales definidas usando el método adecuado.

$$276. \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx = \frac{16}{3}$$

$$277. \int_1^2 x\sqrt{x-1} dx = \frac{16}{15}$$

$$278. \int_1^e \ln(x) dx = 1$$

$$279. \int_0^{\sqrt{2}} y^3 e^{y^2} dy = \frac{1}{2}(e^2 + 1)$$

$$280. \int_2^4 \operatorname{arcsec} \sqrt{z} dz = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} + 1$$

$$281. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{6} \ln(0.1)$$

$$282. \int_1^2 \frac{5x^2 - 3x + 18}{9x - x^3} dx = 13 \ln(2) - 4 \ln(5)$$

$$283. \int_1^3 \frac{x^2 - 4x + 3}{x(x+1)^2} dx = \ln \left(\frac{27}{4} \right) - 2$$

4.2. Aplicaciones de la integral definida

4.2.1. Área bajo la curva

Determine el área de la región R delimitada por la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y el eje x . Grafique las funciones en algún software.

$$284. f(x) = 2x - 1, x \in [1, 2]. \text{ Sol: } A = 2 u^2$$

$$285. f(x) = x^2, x \in [0, 1]. \text{ Sol: } A = \frac{1}{3} u^2$$

$$286. f(x) = x^3, x \in [0, 1]. \text{ Sol: } A = \frac{1}{4} u^2.$$

$$287. f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, 1]. \text{ Sol: } A = \frac{2}{3} u^2.$$

$$288. f(x) = \frac{1}{x}, x \in [1, 2] \text{ Sol: } A = \ln(2) u^2$$

$$289. f(x) = e^{-x}, x \in [0, 1] \text{ Sol: } A \approx 0.63 u^2$$

$$290. f(x) = \ln(x), x \in [1, 2] \text{ Sol: } A \approx 0.38 u^2$$

$$291. f(x) = \operatorname{sen}(x), x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ Sol: } A = 1 u^2$$

4.2.2. Área entre curvas

Determine el área de la región R delimitada por las curvas indicadas. Grafique las funciones en algún software.

292. Entre $f(x) = x^2 + 1, y = 5$. Sol: $A = \frac{32}{3}u^2$

293. Entre $f(x) = 1 - x^2, y = x - 1$. Sol: $A = \frac{9}{2}u^2$

294. Entre $f(x) = 4x - x^2, y = 0$. Sol: $A = \frac{32}{3}u^2$

295. Entre $x = 8 + 2y - y^2, x = 0, y = -1, y = 3$. Sol: $A = \frac{92}{3}u^2$

296. Entre $y = x^2 - 7x + 6, y = 0, x = 2, x = 6$. Sol: $A = \frac{56}{3}u^2$

297. Entre $y = x^3 - 6x^2 + 8x, y = 0$. Sol: $A = 8u^2$

298. Entre $x = 4 - y^2, x = 0$. Sol: $A = \frac{32}{3}u^2$

299. Entre $y^2 = 4 + x, y^2 + x = 2$. Sol: $A = 8\sqrt{3}u^2$

300. Entre $y^2 = 4x, y = 2x - 4$. Sol: $A = 9u^2$

301. Entre $y = 6x - x^2, y = x^2 - 2x$. Sol: $A = \frac{64}{3}u^2$

Para los siguientes ejercicios: (1) Bosquejar la gráfica de cada curva. (2) Encontrar los puntos de intersección, si los hay. (3) Determinar el área de la región R .

302. La región R delimitada por $\{y = x^2 + 2x - 3, y = 0\}$ **Resp.** $\frac{32}{3}$

303. La región R delimitada por $\{y = x^2 - 4x, y = -x^2\}$ **Resp.** $\frac{8}{3}$

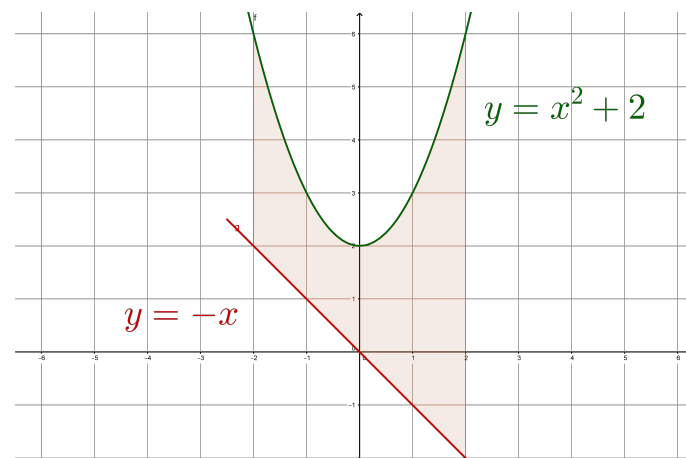
304. La región R delimitada por $\{x = -y^2 + y + 2, x = 0\}$ **Resp.** $\frac{9}{2}$

305. La región R delimitada por $\{y = x^2/4; y = 4\}$ **Resp.** $\frac{64}{3}$

306. La región R delimitada por $\{y = x - 1, x = 3 - y^2\}$ **Resp.** $\frac{9}{2}$

307. La región R delimitada por $\{y = 2\sqrt{x}; y = 2x - 4; x = 0\}$ **Resp.** $\frac{32}{3}$

308. Basándose en la figura, plantear y evaluar la integral que proporcione el área de la región.



4.2.3. Volumen de sólidos de revolución

Aplicando el método de los discos o arandelas realizar lo que se pide.

309. Mostrar que el volumen de un cilindro de radio r y altura h es $\pi r^2 h$

310. Mostrar que el volumen de un cono recto de altura h y radio r está dado por $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

311. Mostrar que el volumen de la esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Determine el volumen del sólido de revolución generado al girar la región R indicada alrededor del eje x .

312. Región R entre $y = x, y = x^2$. Sol: $V = \frac{2}{15}\pi u^3$

313. Región R entre $y^2 = 8x, x = 2$. Sol: $V = 16\pi u^3$

314. Región R entre $y^2 = 8x, x = 2$. Sol: $V = 16\pi u^3$

315. Región R entre $y = \frac{1}{4}x^2, x = 4, y = 0$. Sol: $V = \frac{64}{5}\pi u^3$

316. Región R entre $y = x^3, x = 2, y = 0$. Sol: $V = \frac{128}{7}\pi u^3$

317. Región R entre $y = 4x, y = 4x^2$. Sol: $V = \frac{32}{15}\pi u^3$

318. Región R entre $y = \sqrt{x}, x = 4, y = 0$. Sol: $V = 8\pi u^3$

319. Región R entre $y = x^2, y = 4 - x^2$. Sol: $V = \frac{64\sqrt{2}}{3}\pi u^3$

Determine el volumen el sólido de revolución generado al girar la región R alrededor del eje y .

320. Región entre $y^2 = 8x, x = 2$. Sol: $V = \frac{128}{5}\pi u^3$

321. Región entre $x = y^2, x = 0, y = 2$. Sol: $V = \frac{32}{5}\pi u^3$

322. Región entre $x = \sqrt{y}, x = 0, y = 4$. Sol: $V = 8\pi u^3$

323. Región entre $y = 4x, y = 4x^2$. Sol: $V = \frac{2}{3}\pi u^3$

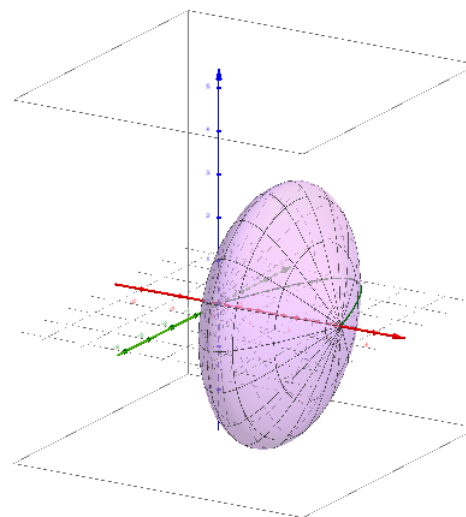
324. Región entre $y = x^2, y = 2$. Sol: $V = 2\pi u^3$

325. Región entre $y^2 = x, 2y = x$. Sol: $V = \frac{64}{15}\pi u^3$

326. Región entre $x = y^2, y - x + 2 = 0$. Sol: $V = \frac{72}{5}\pi u^3$

327. Región entre $y = x^3, y = 8, x = 0$. Sol: $V = \frac{96}{5}\pi u^3$

328. El sólido que se muestra fue generado al rotar alrededor del eje x la región R , delimitada por las curvas $y = 0; f(x) = 3\sin x$ con $0 < x < \pi$. Calcular su volumen.



5. Unidad V. Métodos de integración. Parte II

5.1. Integración de potencias trigonométricas

Verificar las siguientes integrales de potencias trigonométricas usando la identidad trigonométrica adecuada.

Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^n x \, dx$; $\int \operatorname{cos}^n x \, dx$

$$329. \int \operatorname{sen}^3(x) \, dx = -\operatorname{cos}(x) + \frac{1}{3} \operatorname{cos}^3(x) + C$$

$$330. \int \operatorname{cos}^3(x) \, dx = \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3(x) + C$$

$$331. \int \operatorname{cos}^5(x) \, dx = \operatorname{sen}(x) - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^3(x) + \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5(x) + C$$

$$332. \int \operatorname{sen}^2(ax) \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{4a} + C$$

$$333. \int \operatorname{cos}^2(3x) \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(6x)}{12} + C$$

$$334. \int \operatorname{sen}^4(ax) \, dx = \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{4a} + \frac{\operatorname{sen}(4ax)}{32a} + C$$

$$335. \int \operatorname{sen}^6(x) \, dx = \frac{5x}{16} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}^3(2x)}{48} + \frac{3 \operatorname{sen}(4x)}{64} + C$$

$$336. \int \operatorname{cos}^6(x) \, dx = \frac{5x}{16} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} - \frac{\operatorname{sen}^3(2x)}{48} + \frac{3 \operatorname{sen}(4x)}{64} + C$$

Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x \operatorname{cos}^n x \, dx$

$$337. \int \operatorname{sen}^2(x) \operatorname{cos}^3(x) \, dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3(x) - \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5(x) + C$$

$$338. \int \operatorname{cos}^4(2x) \operatorname{sen}^3(2x) \, dx = -\frac{1}{10} \operatorname{cos}^5(2x) + \frac{1}{14} \operatorname{cos}^7(2x) + C$$

$$339. \int \operatorname{sen}^3(3x) \operatorname{cos}^5(3x) \, dx = \begin{cases} -\frac{1}{18} \operatorname{cos}^6(3x) + \frac{1}{24} \operatorname{cos}^8(3x) + C \\ \frac{1}{12} \operatorname{sen}^4(3x) - \frac{1}{9} \operatorname{sen}^6(3x) + \frac{1}{24} \operatorname{sen}^8(3x) \end{cases}$$

$$340. \int \frac{\operatorname{sen}^5(x)}{\sqrt{\operatorname{cos}(x)}} \, dx = \begin{cases} -2 \operatorname{cos}^{1/2} x + \frac{4}{5} \operatorname{cos}^{5/2} x - \frac{2}{9} \operatorname{cos}^{9/2} x + C \\ -\frac{2}{9} \sqrt{\operatorname{cos}^9(x)} - \frac{4}{5} \operatorname{sen}^2(x) \sqrt{\operatorname{cos}(x)} - \frac{6}{5} \sqrt{\operatorname{cos}(x)} + C \end{cases}$$

$$341. \int \frac{\operatorname{cos}^3(x)}{\operatorname{sen}^4(x)} \, dx = \operatorname{csc}(x) - \frac{1}{3} \operatorname{csc}^3(x) + C$$

$$342. \int \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{cos}^2\left(\frac{x}{2}\right) \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{16} + C$$

$$343. \int \operatorname{sen}^4(x) \operatorname{cos}^4(x) \, dx = \frac{1}{128} \left(3x - \operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{8} \operatorname{sen}(8x) \right) + C$$

$$344. \int \operatorname{sen}^3(3x) \operatorname{cos}^3(3x) \, dx = \begin{cases} \frac{1}{12} \operatorname{sen}^4(3x) - \frac{1}{18} \operatorname{sen}^6(3x) + C \\ -\frac{1}{12} \operatorname{cos}^4(3x) + \frac{1}{18} \operatorname{cos}^6(3x) + C \end{cases}$$

Integrales de la forma $\int \tan^m x \operatorname{sec}^n x \, dx$

$$345. \int \tan^3(3x) \operatorname{sec}(3x) \, dx = \frac{1}{9} \operatorname{sec}^3(3x) - \frac{1}{3} \operatorname{sec}(3x) + C$$

$$346. \int \tan^3(2x) \operatorname{sec}^3(2x) \, dx = \frac{1}{10} \operatorname{sec}^5(2x) - \frac{1}{6} \operatorname{sec}^3(2x) + C$$

$$347. \int \tan^3(3x) \sec^4(3x) dx = \begin{cases} \frac{1}{12} \tan^4(3x) + \frac{1}{18} \tan^6(3x) + C \\ \frac{1}{18} \sec^6(3x) - \frac{1}{12} \sec^4(3x) + C \end{cases}$$

$$348. \int \tan^4(x) \sec^4(x) dx = \frac{1}{7} \tan^7(x) + \frac{1}{5} \tan^5(x) + C$$

$$349. \int \sec^4(2x) dx = \frac{1}{2} \tan(2x) + \frac{1}{6} \tan^3(2x) + C$$

$$350. \int \sec^6(ax) dx = \frac{1}{a} \tan(ax) + \frac{2}{3a} \tan^3(ax) + \frac{1}{5a} \tan^5(ax) + C$$

Integrales de la forma $\int \cot^m x \csc^n x dx$

$$351. \int \cot^3(2x) \csc(2x) dx = \frac{1}{2} \csc(2x) - \frac{1}{6} \csc^3(2x) + C$$

$$352. \int \cot(3x) \csc^4(3x) dx = \begin{cases} -\frac{1}{6} \cot^2(3x) - \frac{1}{12} \cot^4(3x) + C \\ -\frac{1}{12} \csc^4(3x) + C \end{cases}$$

$$353. \int \cot^3(x) \csc^3(x) dx = -\frac{1}{5} \csc^5(x) + \frac{1}{3} \csc^3(x) + C$$

$$354. \int \cot^3(x) \csc^5(x) dx = -\frac{1}{7} \csc^7(x) + \frac{1}{5} \csc^5(x) + C$$

$$355. \int \csc^6(x) dx = -\cot(x) - \frac{2}{3} \cot^3(x) - \frac{1}{5} \cot^5(x) + C$$

Integrales de la forma $\int \tan^n x dx$; $\int \cot^n x dx$

$$356. \int \tan^3(x) dx = \frac{1}{2} \tan^2(x) - \ln |\sec(x)| + C$$

$$357. \int \cot^4(3x) dx = -\frac{1}{9} \cot^3(3x) + \frac{1}{3} \cot(3x) + x + C$$

$$358. \int \tan^4(x) dx = \frac{1}{3} \tan^3(x) - \tan(x) + x + C$$

$$359. \int \tan^5(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4(x) - \frac{1}{2} \tan^2(x) + \ln |\sec(x)| + C$$

$$360. \int \cot^3(2x) dx = -\frac{1}{4} \cot^2(2x) + \frac{1}{2} \ln |\csc(2x)| + C$$

$$361. \int \cot^6(2x) dx = -\frac{1}{10} \cot^5(2x) + \frac{1}{6} \cot^3(2x) - \frac{1}{2} \cot(2x) - x + C$$

Verificar las siguientes integrales definidas

$$362. \int_0^{\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta = \frac{2}{3}$$

$$363. \int_0^1 \operatorname{sen}^4 \frac{1}{2} \pi z dz = \frac{3}{8}$$

$$364. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^6 x dx = \frac{56}{15}$$

$$365. \int_0^{\pi/3} \frac{\tan^3 \alpha}{\sec \alpha} d\alpha = \frac{1}{2}$$

Integrales trigonométricas adicionales. Optativo

Integrales de la forma $\int \sin(mx) \cos(nx) dx$

Para las siguientes tres integrales se requiere de las identidades de producto de senos y cosenos.

$$366. \int \sin(3x) \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{10} \sin(5x) + C$$

$$367. \int \cos(4x) \cos(2x) dx = \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{12} \sin(6x) + C$$

$$368. \int \cos(3x) \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{10} \sin(5x) + C$$

5.2. Integración por sustitución trigonométrica

Verificar las siguientes integrales usando sustitución trigonométrica.

5.2.1. Caso 1. $f(\sqrt{a^2 - b^2 u^2})$

$$369. \int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} dx = \sqrt{25 - x^2} + 5 \ln \left| \frac{\sqrt{25 - x^2} - 5}{x} \right| + C$$

$$370. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} dx = -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{4x} + C$$

$$371. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{9 - 16x^2}} dx = -\frac{\sqrt{9 - 16x^2}}{9x} + C$$

$$372. \int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x} dx = \sqrt{9 - 4x^2} + 3 \ln \left| \frac{\sqrt{9 - 4x^2} - 3}{x} \right| + C$$

$$373. \int \frac{x^2}{(4 - x^2)^{5/2}} dx = \frac{x^3}{12(4 - x^2)^{3/2}} + C$$

$$374. \int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^4} dx = -\frac{1}{48} \left(\frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} \right)^3 + C$$

$$375. \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^4} dx = -\frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3x^3} + C$$

Para la siguiente integral se requiere completar el trinomio cuadrado perfecto.

$$376. * \int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx = -\sqrt{3 - 2x - x^2} - \arcsin \left(\frac{x + 1}{2} \right) + C$$

5.2.2. Caso 2. $f(\sqrt{b^2 u^2 + a^2})$

$$377. \int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \right| + \sqrt{x^2 + 1} + C$$

$$378. \int \frac{1}{x \sqrt{4x^2 + 9}} dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{4x^2 + 9} - 3}{2x} \right| + C$$

$$379. \int \frac{1}{(x^2 + 2)^{3/2}} dx = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 2}} + C$$

$$380. \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{3/2}} dx = \ln \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + C$$

$$381. \int \frac{x^3}{(x^2 + 4)^{3/2}} dx = \frac{x^2 + 8}{\sqrt{x^2 + 4}} + C$$

$$382. \int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2(x^2 + 4)} + C$$

$$383. \int \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx = \frac{1}{54} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{18x^2 + 162} + C$$

$$384. * \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 9} - \frac{9}{2} \ln \left| \sqrt{x^2 + 9} + x \right| + C$$

Para las siguientes dos integrales se requiere completar el trinomio cuadrado perfecto

$$385. \int \frac{1}{(x^2 + 6x + 13)^2} dx = \frac{1}{16} \arctan\left(\frac{x + 3}{2}\right) + \frac{x + 3}{8x^2 + 48x + 104} + C$$

$$386. \int \frac{1}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx = \frac{\arctan(x - 2)}{2} + \frac{x - 2}{2x^2 - 8x + 10} + C$$

5.2.3. Caso 3. $f(\sqrt{b^2u^2 - a^2})$

$$387. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 7}} dx = \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{7x} + C$$

$$388. \int \frac{1}{x(x^2 - 9)^{3/2}} dx = \frac{-1}{9\sqrt{x^2 - 9}} - \frac{1}{27} \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$$389. \int \frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{x} dx = \sqrt{4x^2 - 9} - 3 \operatorname{arcsec}\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

$$390. \int \frac{1}{(4x^2 - 9)^{3/2}} dx = -\frac{x}{9\sqrt{4x^2 - 9}} + C$$

$$391. \int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^3} dx = \frac{1}{4} \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2x^2} + C$$

Para las siguientes dos integrales se requiere de completar el trinomio cuadrado perfecto.

$$392. \int \frac{1}{(x^2 + 2x)^{3/2}} dx = -\frac{x + 1}{\sqrt{x(x + 2)}} + C$$

$$393. * \int_C \frac{x}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} dx = \sqrt{x^2 - 6x + 5} + 3 \ln \left| x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 5} \right| + C$$

$$394. \int \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2 - 9}} dx = \frac{1}{54} \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3}\right) + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{18x^2} + C$$

$$395. * \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 16}} dx = 8 \ln \left| \sqrt{x^2 - 16} + x \right| + \frac{x \sqrt{x^2 - 16}}{2} + C$$

Comprobar las siguientes integrales definidas usando el método de sustitución trigonométrica.

$$396. \int_1^2 \frac{1}{(6 - x^2)^{3/2}} dx = \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{5}}{30}$$

$$397. \int_2^4 \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} dx = 4 \ln(2 + \sqrt{3}) - 2\sqrt{3}$$

$$398. \int_4^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \pi$$

$$399. * \int_0^5 x^2 \sqrt{25 - x^2} dx = \frac{625}{16} \pi$$

*Esto, por tanto, es matemáticas; te recuerda la forma invisible del alma:
da luz a sus propios descubrimientos; despierta la mente y purifica el
intelecto; ilumina nuestras ideas intrínsecas; elimina el olvido y la
ignorancia que nacen con nosotros.*
Proclo -filósofo neoplatónico griego.

6. Bibliografía

1. Stewart, J. 1999. Cálculo: Conceptos y Contextos. Internacional Thompson editores.
2. Leithold, L. 1992. El Cálculo, con Geometría Analítica, 6a edición. Harla.
3. Purcell, E. J. y D. Varberg. 1987. Cálculo con Geometría Analítica. Prentice Hall.
4. Problemario de cálculo integral 2009 de la Preparatoria Agrícola.
5. Ayres, F. Jr. 1982. Cálculo Diferencial e Integral. Serie de Compendio Schaums, Mc. Graw Hill.
6. Granville, W. A., Smith P. F. y Longley W. R. 1978. Cálculo Diferencial e Integral. Editorial UTEHA.
7. Zill, D. G. 1987. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo editores Iberoamérica.
8. Haeussler, E. F. Jr, Wood, R. J. 2008. Matemáticas para la administración y economía. Pearson Educación.