TAREAS (Cálculo Integral)

Dr. Cruz González Juan Carlos

Semestre Enero-Julio 2025

Índice

1. Tarea 1: Conjuntos, Relaciones, Funciones y Suma: Notación Sigma.

1. Escriba en notación matemática la colección de números naturales que son múltiplos de 3 y menores que 100.
2. Enlístense las cifras que aparecen en el número 2^{14} cuando se escribe de forma decimal.
3. Sea $A = \left\{1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\right\}$. ¿1024 y 50 son parte de A? Justifica.
4. ¿Cuál es el conjunto de las letras en la frase: Preparatoria Agricola?
5. Considere los siguientes conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$. Encuentre $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ y $B - A$

5. Define una relación y una función y mencione cual es su principal diferencia.

7. Proporcione 2 ejemplos de relaciones que no sean funciones.
8. Consideremos la función $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n^2 + 1$. Encuentre la imagen de f, $f^{-1}(10)$, $f^{-1}(7)$
9. Considere la siguiente función: $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \pi x - \pi$. Encuentre
$$\sum_{i=1}^{n} f(i)$$
10. Si $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $g(x) = x - 5$. Calcule
$$\sum_{j=1}^{n} g^{-1}(j)$$
11. Dada la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(t) = \cos(\pi t)$. Encuentre
$$\sum_{i=0}^{n} h(i)$$
12. Sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(i) = \sin(\frac{\pi x}{2})$. Encuentre
$$\sum_{i=0}^{n} \varphi(2k+1)$$

2. Tarea 2. Sumas, limites y aproximación de áreas

1. Calcule las siguientes sumas:
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+2}\right)$
   - $\displaystyle\sum_{k=1}^{50}\left(k^2-(k+1)^2\right)$
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{70}\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)$
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(5^i-5^{-1}\right)$
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+2})$
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{5}{3^{i-1}}$
2. Calcule el limite que se indica:
   - $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(n^2+4ni+4i^2)$
   - $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(5\left(\frac{2}{n}\right)-2k\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)$
   - $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^3}(i-1)^2$
   - $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i^2}{i^3+i+1}-\frac{2(i-1)^2}{(i-1)^3+(i-1)+1}\right)$
   - $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left(\frac{3i}{n}-1\right)^2$
   - $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\left(\frac{2i}{n}-1\right)^2\right)\frac{2}{n}$
3. Aproxime el área bajo la curva de la siguiente función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sqrt{x}$ en el intervalo $I=[5,8]$ dando 10 subintervalos de misma longitud.

3. Tarea 3. Integral definida y áreas

Instrucciones. Todo debe ser calculado con la «definición» de integral definida vista en clase.

1. Calcula el area de la región acotada por la parabola $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - x$, las rectas $x = 1$, $x = 2$, y el eje X.
2. Calcula el área de la región $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$
3. Calcule el área de la región R acotada en el primer cuadrante por la gráfica de la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 2x - x^2$ y el eje X.
4. Calcule el área de la región R acotada por la curva $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\delta(x) = x^3 + 1$, el eje X y el eje Y.
5. Calcula el area de la región acotada por la curva $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\gamma(x) = x^3 - x + 1$, el eje X y por las rectas $x = -1$, $x = 1$.
6. Calcula el área de la región $R = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq |x^2 - 4|\}$

4. Tarea 4. Propiedades de la integral definida

Instrucciones. En esta tarea es suficiente con usar las definiciones y resultados vistos en clase. También es necesario considerar lo siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

NOTA IMPORTANTE: No olvide que no se han visto formulas de integración de ninguna indole, por lo que no se permite el uso de formulas de integración y ningún método de integración. Solo se permiten las propiedades vistas en clase y la definición (con limites) de integral.

1. Aplique las propiedades de la integral y el hecho de que $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$ y $\int_{-1}^{1} x dx = 0$ para calcular:

   - $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(2x-1)dx.$
   - $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3 - 3x^2 + x}{x} dx.$
   - $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{-2}(x^4 + x^3 - 5x^2)dx.$
   - $\displaystyle\int_{-1}^{1} 5x^2 - x dx.$
   - $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 2x^2 dx + \int_{0}^{1} x^2 dx.$
   - $\displaystyle\frac{3}{4}\int_{0}^{1} 4x dx - \int_{0}^{-1} 3x dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 6x^2 dx - \int_{1}^{0} 3x^2 dx.$
   - $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\left(\sqrt[4]{2}x - \sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[4]{2}x + \sqrt[4]{3}\right) dx.$
   - $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^2 - 2x - 5 dx.$

2. Calcula la integral $\int_0^1 |x-1|dx$.

3. Considere f una función INTEGRABLE en el intervalo $[-2,1]$ cualesquiera. Calcule

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{1}^{0} f(x)dx + \int_{-2}^{-1} f(x)dx - \int_{-2}^{1} f(x)dx$$

4. Exprese como una sola integral la suma:

$$\int_{0}^{1} (1-x^2)dx + \int_{1}^{3} (x^2-1)dx$$

5. Tarea 5. Teorema del Valor Medio

1. Muestre que las siguientes desigualdades se cumplen:

   a. $\int_{-2}^{1} x^2dx \leq \int_{-2}^{1}(2-x)dx$

   b. $\int_{1}^{2} x^2dx \geq \int_{1}^{2}(2-x)dx$

2. Muestre que $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx \leq \frac{\pi}{4}$.

3. Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ con $a < b$, muestre que hay almenos un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

4. Calcule $\int_{-2}^{0} |x+1|dx$ usando unicamente limites. Posteriormente, encuentre el valor de $c \in [-2, 0]$ tal que

$$\int_{-2}^{0} |x+1|dx = 2|c+1|.$$

5. Considere las siguientes reglas de correspondencia, proporcione los dominios y codominios adecuados para realizar las composiciones solicitadas:

   1. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{x^2-4}$. Calcula y simplifica $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.
   2. $f(x) = \ln(x^2+1)$ y $g(x) = e^{x-1}$, encuentra $(f \circ g)(x)$.
   3. $f(x) = \tan^{-1}(x)$ y $g(x) = \sin(x)$, evalúa $(f \circ g)(x)$.
   4. $f(x) = \log_2(x+3)$ y $g(x) = 2^x - 1$, encuentra $(f \circ g)(x)$.
   5. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ y $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Evalúa $(f \circ g)(x)$ y justifica si es una función identidad.
   6. $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+2}$ y $g(x) = \sqrt{x+4}$. Determina $(f \circ g)(x)$.

6. Derivando.

   1. $f(x) = \ln\left(\sin^2(3x^2+1) + e^{x^3}\right)$. Encuentra $f'(x)$.
   2. $g(x) = e^{\tan(x^2+\cos x)}$. Calcula $g'(x)$.
   3. $h(x) = \sqrt{\ln\left(x^4 + e^{\sin(x^3)}\right)}$. Deriva h.
   4. $p(x) = \sin\left(e^{\cos(x^2+2x)}\right)$. Encuentra $p'(x)$.
   5. $q(x) = \frac{\sqrt{x^2+e^x}}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}$. Calcula $q'(x)$.

6. Tarea 6: Hasta el Teorema Fundamental del Cálculo (T.F.C)

1. Redacte el Teorema del Valor Medio y el Teorema Fundamental del Cálculo.
2. Aplica el teorema del valor medio para integrales definidas, para demostrar que
$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+3} \leq \frac{2}{3}.$$
3. Determine la integral en su dominio (intervalos) de las siguientes funciones y aplique el T.V.M.
   - $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por $f(x) = x^2$.
   - $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por $g(x) = \sqrt{1-x}$.
   - $h : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por $h(x) = (x-1)^3$.
   - $\alpha : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por $\alpha(x) = 2x+1$.
4. Usando unicamente el Teorema Fundamental del Cálculo calcula las siguientes integrales:
   - $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2+x+x^2)^2 dx.$
   - $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$
   - $\displaystyle\int_{0}^{4} \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{2}}\right) dx.$
   - $\displaystyle\int_{-1}^{1} (|w|-w) dw.$
   - $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x)-\cos(x)| dx.$
   - $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) dx.$
   - $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{d}{dx} \sin^3\left(\left(\cos^4\left(x^{100}\right)\right)\frac{\pi}{2}\right) dx$

7. Tarea 7: Metodos de integración: T.F.C. y cambio de variable (C.V.)

1. Calcule las siguientes integrales definidas e indefinidas:

    1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2+x+x^2)^2dx$
    2. $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{t^3-2t-1}{\sqrt{t}}dt$
    3. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\operatorname{sen}(x)-\cos(x)|dx$
    4. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x))dx$
    5. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sec^{\frac{3}{2}}(u)\tan(u)du$

    1. $\displaystyle\int\frac{4x-2}{(x^2-x+1)^{\frac{1}{3}}}dx$
    2. $\displaystyle\int\sin^5(x)dx$
    3. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}dx$
    4. $\displaystyle\int(x^2-4x+4)^{\frac{2}{3}}dx$
    5. $\displaystyle\int\sqrt{1+\cos(x)}$

Para los siguientes ejercios considere el siguiente resultado, así como sus conocimientos de cálculo diferencial.

Proposición 1. *Si f es una función continua en $[a,b]$ y una función derivable α adecuada, entonces*

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{\alpha(x)}f(t)dt=f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

2. Calcule la derivada que se indica.

    - $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}}\operatorname{sen}(t^6)dt.$
    - $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{1}^{\sqrt{x}}\left(\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\frac{ds}{1+s^2}\right)dt\right].$

3. Calcule los siguientes limites.

    - $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}\frac{dt}{1+t^3}.$
    - $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\int_{0}^{\frac{1}{x}}t^2\left(1+\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt.$

4. Si $F(t)=\int_{1}^{\frac{1}{t}}\operatorname{sen}(\sqrt{s})ds$ para todo $t\geq 1$ y $G(x)=\int_{2\pi}^{x^2}F'(t)dt$ para cada $x\geq\frac{2}{\pi}$, calcule $G'(\frac{2}{\pi})$.

8. Tarea 8: Metodos de integración: T.F.C., C.V., Integración por partes (I.P.)

Calcule las siguientes integrales definidas e indefinidas:

1. $\int \ln^2(x)dx$
2. $\int x\cot(x)\csc(x)dx$
3. $\int x^2\cos(x)dx$
4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3}dx$
5. $\int x\sec(2x)\tan(2x)dx$
6. $\int \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)dx$
7. $\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2(3x)}dx$
8. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx$
9. $\int x\sec(\pi x)\tan(\pi x)dx$
10. $\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$
11. $\int \frac{x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx$
12. $\int \ln(\sqrt{x+1})dx$
13. $\int x\ln(x)dx$
14. $\int x^3e^{x^2}dx$
15. $\int x2^{3x}dx$
16. $\int x\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)dx$
17. $\int x^{-3}\ln(x)dx$
18. $\int x\sec^2(x)dx$
19. $\int e^{3x}\cos^2(x)dx$
20. $\int x\cos^2(x)\operatorname{sen}^2(x)dx$

9. Tarea 9: Metodos de integración: T.F.C., C.V., I.P. y Sustitución Trigonometrica (S.T.)

Calcule las siguientes integrales definidas e indefinidas:

1. $\int \operatorname{sen}^4(ax)dx$
2. $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)dx$
3. $\int \frac{\operatorname{sen}^5(x)}{\sqrt{\cos(x)}}dx$
4. $\int \frac{\cos^3(z)}{\operatorname{sen}^4(z)}dz$
5. $\int \tan^3(2x)\sec^3(2x)dx$
6. $\int \cot(3x)\csc^4(3x)dx$
7. $\int \tan^3(x)dx$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta)d\theta$
9. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}dx$
10. $\int_{e^{\frac{\pi}{8}}}^{e^{\frac{\pi}{4}}} \frac{\cos(\ln(x^2))}{x}dx$
11. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$
12. $\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{\frac{5}{2}}}dx$
13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}$
14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}dx$
15. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-7}}$
16. $\int \frac{1}{x(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}dx$
17. $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-9}}dx$
18. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}dx$
19. $\int_4^6 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}dx$
20. $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}dx$

10. Tarea 10: Metodos de integración: Todos hasta Fraccciones Parciales (F.P)

Calcule las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{6x-15}{x^2-3x}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{z+16}{z^2+2z-8}dz$
4. $\displaystyle\int \frac{3w}{w^2-2w-3}dw$
5. $\displaystyle\int \frac{7x-10}{2x^2-7x-4}dx$
6. $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3-4x}dx$
7. $\displaystyle\int \frac{z^2+2z+3}{z^3-z}dz$
8. $\displaystyle\int \frac{4y^2-y-8}{y^3-y^2-2y}dy$
9. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+5x^2-6x}dx$
10. $\displaystyle\int \frac{3w+2}{w^3+w^2}dw$
11. $\displaystyle\int \frac{y^2-2y+4}{y^3-4y^2+4y}dy$
12. $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x+1)(x-1)^2}dx$
13. $\displaystyle\int \frac{x}{(x-3)(x+1)^2}dx$
14. $\displaystyle\int \frac{2w^2-25w-33}{(w-5)(w+1)^2}dw$
15. $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-4}{x^3+3x^2+3x+1}dx$
16. $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3-2x^2+x}dx$
17. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$
18. $\displaystyle\int \frac{6w-1}{w^3(2w-1)}dw$

11. Tarea 11: Área bajo la curva

Para los siguientes ejercicios, dertermine el área de la región R delimitada por la curva dada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y el eje X, donde el intervalo $[a, b]$ es dado, al igual que la regla de correspondencia de f.

1. $f(x) = 2x - 1$, $x \in [1, 2]$
2. $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$
3. $f(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$
4. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$
5. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, 2]$
6. $f(x) = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$
7. $f(x) = \ln(x)$, $x \in [1, 2]$
8. $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

12. Tarea 12: Área entre curvas

1. Determine el área de la región R delimitada las curvas indicadas.

   1. $f(x) = x^2 + 1$, $y = 5$
   2. $f(x) = 1 - x^2$, $y = x - 1$
   3. $f(x) = 4x - x^2$, $y = 0$
   4. $x = 8 + 2y - y^2$, $x = 0$, $y = -1$, $y = 3$
   5. $y = x^2 - 7x + 6$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$
   6. $x = 4 - y^2$, $x = 0$
   7. $y^2 = 4 + x$, $y^2 + x = 2$

2. Para los siguientes incisos: (1) Bosqueje la gráfica de cada curva. (2) Encontrar los puntos de intersección, si los hay. (3) Determinar el área de la región R.

   8. La región R delimitada por: $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$
   9. La región R delimitada por: $y = x^2 + 2x - 3, y = 0$.
   10. La región R delimitada por: $y = x^2 - 4x, y = -x^2$.
   11. La región R delimitada por: $x = -y^2 + y + 2, x = 0$.
   12. La región R delimitada por: $y = \frac{1}{4}x^2, y = 4$.
   13. La región R delimitada por: $y = x - 1, x = 3 - y^2$.
   14. La región R delimitada por: $y = 2\sqrt{x}, y = 2x - 4, x = 0$.

13. Tarea 13: Volumen de sólidos de revolución

Aplicando el método de los discos o arandelas realizar lo que se pide.

a. Usando integración haga lo que se pide.

1. Mostrar que el volumen de un cilindro de radio r y altura h es $\pi r^2 h$.
2. Mostrar que el volumen de un cono recto de altura h y radio r está dado por $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.
3. Mostrar que el volumen de la esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

b. En las siguientes, determine el volumen del sólido de revolución generado al girar la región R indicada al rededor del eje X.

1. Region R entre $y = x$, $y = x^2$.
2. Region R entre $y^2 = 8x$, $x = 2$.
3. Region R entre $y = \frac{1}{4}x^2$, $x = 4$, $y = 0$.
4. Region R entre $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$.
5. Region R entre $y = 4x$, $y = 4x^2$.
6. Region R entre $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$.
7. Region R entre $y = x^2$, $y = 4 - x^2$.

c. En las siguientes, determine el volumen del sólido de revolución generado al girar la región R al rededor del eje Y.

1. Region R entre $y^2 = 8x$, $x = 2$.
2. Region R entre $x = y^2$, $x = 0$, $y = 2$.
3. Region R entre $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 4$.
4. Region R entre $y = 4x$, $y = 4x^4$.
5. Region R entre $y = x^2$, $y = 2$.
6. Region R entre $y^2 = x$, $2y = x$.
7. Region R entre $x = y^2$, $y - x + 2 = 0$.
8. Region R entre $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$

d. El sólido que se muestra fue generado al rotar alrededor del eje X la región R, delimitadas por las curvas $y = 0$; $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(x)$ con $0 < x < \pi$. Calcular el volumen.