# Lógica básica, campo de los reales y relaciones

1. Considere el enunciado $P \Rightarrow R$. De tres ejemplos de este tipo de condicional. Escriba una reflexión sobre el porque dicho condicional es verdadero cuando el antecedente es falso (en el fondo quiere decir que cuando $P$ es falso, se puede deducir cualquier cosa), y proporcione un ejemplo de dicho condicional que muestre que a partir de algo falso se puede deducir algo verdadero y que de algo falso se puede producir algo falso.

2. Sean $P$ y $Q$ dos enunciadas matemáticos (proposiciones). Podemos crear los enunciados $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$ y con estas dos podemos crear el enunciado: $(P \Rightarrow Q)$ y $(Q \Rightarrow P)$. Proporciones la tabla de verdad del ultimo enunciado.

3. Decimos que dos enunciado $P$ y $Q$ son lógicamente equivalentes si tienen la misma tabla de verdad. Muestre que los enunciados $P \Rightarrow Q$ es lógicamente equivalente a $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Esta equivalencia lógica es la que permite hablar de demostraciones por contrapositiva.

4. Si $D = \{x \mid x \text{ es una vocal en la palabra DEMOCRACIA}\}$, escribe el conjunto $D$ especificando sus elementos.

5. Sean $A$, $B$ conjuntos dentro de un conjunto universo $X$. Demuestre que las siguientes se cumplen:

   *a)* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

   *b)* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

   Las anteriores se conocen como leyes de **D'Morgan**.

6. Verifique las leyes de **D' Morgan** para los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\} \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es impar}\} \\ X &= \mathbb{N}. \end{aligned}$$

   Donde $X$ es el conjunto universo.

7. Sean $A = \{x : x^2 - 9 = 0\}$, $B = \{x : x^2 - 81 = 0\}$. Encuentre todas las relaciones de $A$ a $B$, es decir, todos los subconjuntos de $A \times B$.

8. Sean $A = \{x : x^3 - 3x^2 - 18x = 0\}$, $B = \{x : x^2 + 7x + 12 = 0\}$. Encuentre todas las relaciones de 5 elementos $A$ a $B$, es decir, todos los subconjuntos de cardinalidad 5 de $A \times B$.

9. Con base en el ejercicio 8 proporcione el dominio, imagen y codominio de las relaciones solicitadas.

10. Demuestre que el conjunto solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es $\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$.

11. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

    *i)* $\frac{ab^2m^2-2ab^2mn+ab^2n^2}{abm^2-abn^2}$

    *ii)* $\frac{(y-1)(y^2-8y+16)}{(y^2-4y)(1-y^2)}$

    *ii)* $\frac{(a-2)^2(a^2+a-12)}{(2-a)(3-a)^2}$

    *iii)* $\dfrac{\frac{(3x-1)^{\frac{1}{3}}}{(3x+1)^{\frac{2}{3}}} - \frac{(3x+1)^{\frac{1}{3}}}{(3x-1)^{\frac{2}{3}}}}{(3x-1)^{\frac{2}{3}}}$

*iv)* $\dfrac{\frac{(5x^2+1)^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}} - \frac{10x^{\frac{4}{3}}}{3(5x^2+1)^{\frac{2}{3}}}}{(5x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$

*v)* $\frac{x^2-x-12}{x^2+x-2} \div \frac{x^2-6x+8}{x^2-3x-10} \div \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-15}$

*vi)* $\frac{x^3-5x^2}{x^3-25} + \frac{x^2+3x}{x^2+5x+6} + \frac{x^2+3x-4}{x^2+6x+8} \cdot \frac{x^2-x-6}{x^2-6x+5}$

12. Simplifica las siguientes expresiones, empleando las definiciones, propiedades y leyes de los exponentes:

    *a)* $\left(3^5 \cdot 5^{-4}\right)\left(2^3 \cdot 3^{-7} \cdot 5^6\right)$

    *b)* $\left(4^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)\left(2^{-1} \cdot 3^{\frac{-7}{3}}\right)$

    *c)* $\left(\frac{3^{-4} \cdot 5^{-1}}{3^2 \cdot 5^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3^4 \cdot 5^3}{3^2 \cdot 5^4}\right)^{-1}$

    *d)* $\left(\frac{7^{-1}}{2^{-1}+3^{-1}+6^{-1}}\right)^{-2}$

13. Simplifique las siguientes expresiones. NOTA: en los primeros dos casos use el Teorema Fundamental de la Aritmética.

    *a)* $\sqrt[5]{7776}$

    *b)* $\sqrt[5]{4084101}$

    *c)* $\sqrt{\frac{2^3 \cdot 5^5}{2^{-1} \cdot 5^3}} \cdot \left(\frac{2^4 \cdot 5^{-1}}{2^5 \cdot 5^{-1}}\right)$

    *d)* $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{10}}{2^{\frac{-5}{3}} \cdot 5^{\frac{-11}{3}}}}$

    *e)* $\left(\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}}{5^2}\right)^{-1} \cdot \sqrt{\frac{5^{-1} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}}}$