Axiomas de los números reales, relación de orden y desigualdades.

1. Usando únicamente los axiomas de campo y los resultados visto en clase, pruebe las siguientes igualdades: Para $a, b, c \in \mathbb{R}$
   - Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
   - Si $a \neq 0$, $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.
   - Para $c \neq 0$, $ac = bc$ implica $a = b$.
   - $(-1)^{-1} = -1$
   - $a^{-1} + b^{-1} = (a+b)(ab)^{-1}$
2. Demuestre las siguientes propiedades (algunas se hicieron en clase): Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$:
   1) $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.
   2) $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$.
   3) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.
   4) $a < b$ y $c < d \Rightarrow a + c < b + d$.
3. Demuestra las siguientes proposiciones:
   - Si $w \in \mathbb{I}$ y $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right) w \in \mathbb{I}$
   - Si $w \in \mathbb{I}$ y $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, entonces $\frac{a}{b} + w \in \mathbb{I}$
   - Si $x, y \in \mathbb{Q}$ con $x < y$, entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.
4. En los números reales ($\mathbb{R}$) se cumple la siguiente propiedad: Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$. Demuestre que las siguientes son equivalentes:
   (i) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.
   (ii) Si $a > 0$, entonces para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < na$.
   (iii) Para cada $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$.

   Es decir, demostrar que $(i) \iff (ii)$ y $(ii) \iff (iii)$.
5. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones:
   - $a > b \geq 0 \Rightarrow a^2 > b^2$
   - $a^2 > b \geq 0 \Rightarrow a > \sqrt{b}$ o $a < -\sqrt{b}$.
6. Sea $\epsilon > 0$ y $a \in \mathbb{R}$. Encuentre el conjunto solución de la desigualdad $|x - a| < \epsilon$.
7. Resuelva las siguientes desigualdades:
   - $\frac{x-1}{1+x} < -2$
   - $\frac{x^2 - |4x|}{x^2} < 1 - x$
   - $\frac{1}{x-1} < \frac{2}{1-3x}$
   - $\left|\frac{3x-1}{x-1}\right| \geq 5$
   - $\sqrt{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2} > 3$
8. Demuestre las siguientes igualdades para $a, b \in \mathbb{R}$:

- $|ab| = |a||b|$
- Si $b \neq 0$, entonces $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $|a^n| = |a|^n$.

9. Demuestre que la siguiente desigualdad se cumple para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

   Esta desigualdad se llama **desigualdad del triángulo**

10. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demuestre las siguientes proposiciones:

    - Si $b \geq 0$, entonces $|a| = b \iff a = b$ o $a = -b$
    - Si $b > 0$, entonces $|a| < b \iff -b < a < b$
    - Si $|a| > b$, entonces $a > b$ o $a < -b$