Aritmética y elementos de álgebra

Tarea 3. Funciones

1. Dados los conjuntos $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 = 0\}$ y $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$, determine todas las relaciones entre E y F y diga cuales son funciones.

2. Para cada una de las siguientes relaciones a trozos, determina si representa una función o no.

   1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ 2x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   ¿Es f una función?

   2. Sea $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por:

   $$g(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \text{ es impar} \\ 2x - 2 & \text{si } x \text{ es par} \end{cases}$$

   ¿Es g una función?

   3. Sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

   $$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   ¿Es h una función?

   4. Sea $k : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

   $$k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x^3 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

   ¿Es k una función?

   5. Sea $m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

   $$m(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   ¿Es m una función?

3. Sean $m, b \in \mathbb{R}$ fijos con $m \neq 0$. Considere la función lineal $L_{m,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $L_{m,b}(x) = mx+b$.

   - Sean $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $L_{m,b}(x_0) = y_0$. Escriba a b en términos de x_0, y_0 y m.
   - Sean $x_0, y_0, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ tal que $L_{m,b}(x_0) = y_0$ y $L_{m,b}(x_1) = y_1$. Escriba a m y a b en términos de x_0, y_0, x_1, y_1.

4. Para cada una de las siguientes parejas de funciones, determina si son iguales o no.

1. $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = x(2x+3) + 1$
2. $h, k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ y $k(x) = |x|$
3. $m, n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $m(x) = \frac{x^2+1}{x}$ y $n(x) = x + \frac{1}{x}$

5. Para las siguientes asignaciones (en $\mathbb{R}$) encuentre el dominio máximo para el cual se puede definir una función con dicha regla de correspondencia (asignación) y codominio $\mathbb{R}$.

- $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-1}{x^2-4}$.
- $g(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.
- $h(x) = \dfrac{x^4-16}{\sqrt{x^2-1}}$.
- $p(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3-1}$.
- $q(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-3x+2}}$.
- $r(x) = \dfrac{x^5+3x^3+2}{x^4-1}$.
- $s(x) = \dfrac{2x^3-5x^2+3x-1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.
- $t(x) = \dfrac{x^4-16}{x^4-1}$.

6. Sea $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $P(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ fijos y $a \neq 0$. Grafique P proporcionando su vértice,concavidad y sus puntos de intersección con el eje X cuando:

- $a = 1, b = -1, c = 1$
- $a = 2, b = -4, c = 4$
- $a = -2, b = 1, c = 1$

7. Sea $P : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $P(x) = \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+b^2+c}$, donde $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$ fijos y D es el dominio máximo de dedinicion según sea el caso (Debes de darlo para cada caso). Grafique P con el método que gusten (sin usar limites y recuerden que pueden usar el método visto en clase), donde:

- $\alpha = 0, \beta = 1, a = -2, b = 1, c = 1$.
- $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}, a = 2, b = -4, c = 4$.
- $\alpha = 1, \beta = 1, a = 1, b = 4, c = 3$
- $\alpha = 2, \beta = 1, a = 0, b = 2, c = 3$

8. Grafique (tabulando) la función exponencial $f_b : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ dada por $f_b(x) = b^x$, donde:

- $b = 2$
- $b = \frac{1}{2}$
- 5
- $\frac{1}{5}$