Funciones inyectivas, sobres y biyectivas, composición de funciones, funciones inversas, funciones exponenciales y logarítmicas

1. Sean $m, b \in \mathbb{R}$ con $m \neq 0$. Demuestre que la función $\mathcal{L}_{m,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{L}_{m,b}(x) = mx + b$ es inyectiva, sobre y por tanto biyectiva y proporciones su inversa.

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Considere la función $f : \mathbb{R} - \{-\frac{b}{a}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{ax+b}$, responda con fundamento (demostrando lo afirmado) las siguientes preguntas ¿f es inyectiva? ¿es sobre? ¿tiene inversa?

3. Sea $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ dada por $g(x) = x^2$. Demuestre que g es biyectiva, y por lo tanto tiene inversa, ¿quien es su inversa?

4. Sea $g : (-\infty, 0] \longrightarrow [0, \infty)$ dada por $g(x) = x^2$. Demuestre que g es biyectiva, y por lo tanto tiene inversa, ¿quien es su inversa?

5. Para las siguientes funciones mencione si son inyectivas, sobres:

   a. $\lfloor \square \rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\lfloor x \rfloor = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.
   b. $\lceil \square \rceil : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\lceil x \rceil = \text{mín}\{k \in \mathbb{Z} : x \leq k\}$.
   c. $[\square] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $[x] = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } x \geq 0 \\ \lceil x \rceil & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
   d. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = \frac{1}{[x]^2}$.

6. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son inyectivas, entonces ¿$f \circ g$ es inyectiva? Demuestre su respuesta.

7. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son sobres, entonces ¿$f \circ g$ es sobre? Demuestre su respuesta.

8. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones. Si $g \circ f$ es sobre, entonces demuestre que g es sobre.

9. Gráfique los siguientes logaritmos:

   - $(0, \infty) \ni x \xmapsto{\log_{2/3}} \log_{2/3}(x) \in \mathbb{R}$,
   - $(0, \infty) \ni x \xmapsto{\log_{2}} \log_{2}(x) \in \mathbb{R}$,
   - $(0, \infty) \ni x \xmapsto{\log_{0,5}} \log_{0,5}(x) \in \mathbb{R}$
   - $(0, \infty) \ni x \xmapsto{\log_{3}} \log_{3}(x) \in \mathbb{R}$

10. Demuestre las siguientes propiedades de los logaritmos (se vio en clase, pero la idea es que lo hagan sin ver las notas). Sean $M, N \in (0, \infty)$, $a, b \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ y $n \in \mathbb{N}$ (en general, $x \in \mathbb{R}$);

    - $\log_a(MN) = \log_a(M) + \log_a(N)$,
    - $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log(M) - \log(N)$,
    - $\log_b(M) = \frac{\log_a(M)}{\log_a(b)}$.
    - Si $p \in \mathbb{R}$, entonces $\log_a(M^p) = p \log_a(M)$

11. Resuelva las siguientes ecuaciones:

    $a.$ $3^x = 48$
    $b.$ $2^x = \frac{8}{27}$

c. $2^{x+1}+4=80$
d. $2(3^x)-3^{2x}+3=0$
e. $2^{x+1}=16$
f. $5^{x-1}=2+\frac{3}{5^{x-2}}$
g. $100\cdot 10^x=\sqrt[x]{1000^5}$
h. $e^{2x}-e^{x+1}+e^2=0$
i. $2^{x+2}+2^{x+3}+2^{x+4}+2^{x+5}+2^{x+6}=31$
j. $2^{x+1}=4^{2x-4}$
k. $2\log_{10}(x)+\log_{10}(3)=\log_{10}(75)$
l. $\log_2(w^2+4w+3)=4+\log_2(w^2+w)$, $w\neq -1$
m. $16\log_2(x)+4\log_4(x)+2\log_{16}(x)=37$, $x>0$.
n. $6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-4}{3}}=1{,}89$
o. $\log_2(8y-1)-2\log_2(y+1)=3-\log_2(y+4)$
p. $\log_2(x)=\log_4(2)$
q. $\log_3(x)=\log_9(27)$

12. Supongamos que $x=2^p$ y $y=4^p$, muestre que $\log_2(x^3y)=3p+2q$.
13. Simplifique $\log_{10}(10+3\sqrt{10})+\log_{10}\left(10+\sqrt{90+\sqrt{90}}\right)+\log_{10}\left(10-\sqrt{90+\sqrt{90}}\right)$
14. Resuelva la siguiente ecuación logarítmica: $\frac{\log_4(x^2)}{5+\log_4(x^2)}+(\log_4(x))^2=0$
15. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\left(a^4-2a^2b^2+b^4\right)^{x-1}=(a-b)^{2x}(a+b)^{-2}$$

16. ¿Quien es más grande entre $\sqrt[8]{8!}$ y $\sqrt[9]{9!}$?