Continuidad

a. Trace la gráfica de la función y diga en que puntos la función es continua y en cuales discontinua:

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x \neq -1, \\ 0 & \text{si } x = -1. \end{cases}$

ii) $g(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}.$

iii) $h(x) = \frac{1-x^2}{x^2}.$

iv) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ \frac{1-4x^2}{x^2} & \text{si } 2 \leq x. \end{cases}$

v) $g(x) = \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}.$

2. Clasifique las discontinuidades de cada función como removibles o esenciales:

i) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x}.$

ii) $g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}.$

iii) $h(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x \neq 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}.$

iv) $f(x) = \frac{1-3x^2}{x^2}.$

v) $g(x) = \begin{cases} \frac{4-4\cos(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}.$

vi) $h(x) = \begin{cases} \frac{1+\cos(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}.$

3. Analice la continuidad de cada función en el punto x que se indica.

i) $x = 0,\ f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

ii) $x = 0,\ g(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

iii) $x = 1,\ h(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 1, \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$

iv) $x = -1,\ f(x) = \begin{cases} |x+4| & \text{si } x < -1, \\ |x-2| & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$

4. Determina los valores de a y b que hacen continua a la función.

i) $f(x) = \begin{cases} ax+2 & \text{si } x < 2, \\ x^2+b & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ ax+2b & \text{si } x > 3. \end{cases}$

ii) $g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 3, \\ ax + 2 & \text{si } x > 3. \end{cases}$

iii) $h(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < a, \\ x^2 & \text{si } x \geq a. \end{cases}$

5. Diga como definiría la función dada para que sea continua en $x = 0$.

   i) $f(x) = \frac{x^2}{\sin^2(x)}$.
   ii) $g(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
   iii) $h(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$.
   iv) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.
   v) $g(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x}$.

Recta tangente y normal

6. Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto P dado.

   i) $y = \sqrt[3]{x}; P = (1, 1)$
   ii) $y = x^3; P = (2, 8)$
   iii) $y = (x + 1)^2 - 1; P = (1, 3)$

7. Encuentre las ecuaciones de las rectas normal y tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en ele punto P que se indica. Además, en cada caso trace la gráfica de la función y las gráficas de las rectas tangentes y normal.

   i) $y = \sqrt[3]{x}; P = (8, 2)$
   ii) $y = \frac{3}{x}; P = (1, 3)$
   iii) $y = \frac{2}{x} + 1, P = (1, 3)$
   iv) $y = \sqrt{x - 1}; P = (5, 2)$
   v) $y\sqrt{2x + 1}, P = (4, 3)$
   vi) $y = x - x^2; P = (2, -2)$

Definición de derivada

8. Usando la definición de derivada (con limites) vista en clase, calcule las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x^2 + x$
   b) $f(x) = \sqrt{x + 1}$
   c) $f(x) = \frac{1}{x+2}$
   d) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
   e) $f(x) = \frac{5}{1-x}$

9. Encuentre las ecuaciones de las rectas normal y tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en ele punto P que se indica. Además, en cada caso trace la gráfica de la función y las gráficas de las rectas tangentes y normal.

   i) $y = \sqrt[3]{x}; P = (8, 2)$

ii) $y = \frac{3}{x}$; $P = (1,3)$

iii) $y = \frac{2}{x} + 1, P = (1,3)$

iv) $y = \sqrt{x-1}$; $P = (5,2)$

v) $y\sqrt{2x+1}, P = (4,3)$

vi) $y = x - x^2$; $P = (2,-2)$

10. Considere la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

¿Existe $f'(1)$?

11. Considere la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ \cos(x) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

¿f es derivable en $x = 0$?

Reglas de derivación

12. Usando todas las reglas de derivación vistas en clase, calcule la derivada de las siguientes funciones:

(1)	$y = 2x^3$.	(2)	$y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$.
(3)	$y = \frac{1}{(1-x)^2}$.	(4)	$y = (3x+1)^2$.
(5)	$y = (3t^2+2)(t^2-3t-1)$.	(6)	$y = \frac{t^2-1}{1-t}$.
(7)	$y = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$.	(8)	$y = \frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.
(9)	$y = \lvert 3x^2 - 2x + 1\rvert$.	(10)	$y = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.
(11)	$y = -3\sqrt[4]{9t^2-1}$.	(12)	$y = \sqrt{x^2-2x+1}$.
(13)	$y = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}$.	(14)	$y = \sqrt{x^2-18x+9}$.
(15)	$y = \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^{\frac{1}{3}}$.	(16)	$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\lvert\frac{\sqrt{x2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\rvert$.
(17)	$y = \frac{e^{3x}(\sin(x)+3\cos(x))}{10}$.	(18)	$y = e^{\arcsin(2x^2)}$.
(19)	$y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.	(20)	$y = \ln\lvert\sec(x)\rvert - \ln\lvert\cos(x)\rvert$.
(21)	$y = \sin(3x-1)$.	(22)	$y = \frac{1-\cosh(h)}{h}$.
(23)	$y = \sin(x)\cos(x)$.	(24)	$y = \sec(\sqrt{x})$.
(25)	$y = \sqrt{1+\cos(2x)}$.	(26)	$y = \frac{\sin(x)}{\cos(x)-1}$.
(27)	$y = 2\sin(x)\cos(x)$.	(28)	$y = \sqrt{\sec^2(t)-1}$
(29)	$y = x + \tan(x)$.	(30)	$y = \arcsin(3x)$.
(31)	$y = \arctan(\sqrt{x+1})$.	(32)	$y = \frac{x}{2}\arcsin\left(\frac{10x-2}{2\sqrt{5}}\right)$.
(33)	$y = \ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert$.	(34)	$y = \frac{xe^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25}$.
(35)	$y = \ln\lvert\sec(x)+\tan(x)\rvert$.	(36)	$y = (e^x)^{\tan(\frac{x}{2})}$.