Razón de cambio

1. $PQRS$ es un rectángulo inscrito en un triángulo ABC isósceles cuya base mide 12 cm y su altura 24 cm. Si el área del rectángulo disminuye a razón de $4\frac{cm^2}{min}$, encuentre la razón de cambio de las dimensiones del rectángulo en el momento en que su área es $22cm^2$.
2. Al inicio de 1990 el índice de CO_2 (dióxido de carbono) en la atmósfera de la tierra fue de 345 partes por millón; o sea 0.0345 %. Supóngase que la concentración de CO_2 es $0.025t^2 + 345$ partes por millón después de t años del inicio en 1990.
   a) Calcule la razón media del crecimiento de la concentración de la concentración de CO_2 del año 2000 al 2025.
   b) ¿En cuanto tiempo t crece la concentración de CO_2 con una rapidez instantánea igual a la razón media del inciso anterior?
3. Un disco metálico de 10 cm de diámetro, se dilata durante un proceso de calentamiento. Si su radio crece a razón de 0.05 $\frac{cm}{seg}$, ¿con qué rapidez crece el área de sus caras cuando el radio es 5.1 cm?
4. Un hombre a una altura de 1.70 m, jala horizontalmente por uno de sus extremos una cuerda que se desliza sobre una polea. La cuerda tiene una longitud de 5m y tiene atado en su otro extremo un peso w. La polea esta a 5.2 m de altura sobre el suelo. Si el hombre se aleja del pie de la perpendicular trazada de la polea al suelo a razón de 1 $\frac{m}{seg}$, ¿a que razón de cuantos metros por segundo se eleva el peso del suelo cuando el hombre está a 1.2m del pie de la perpendicular?
5. Supóngase que el volumen V de un líquido contenido en una esfera es
$$V = \frac{\pi}{6}h(3x^2 + h^2)$$
en donde h es la profundidad del liquido, y x es el radio del disco determinado por el nivel del liquido. Si el agua contenida en un tanque esférico de 3 metros de radio, sale del tanque a razón de 250 $\frac{l}{min}$; calcule la rapidez con que baja el nivel del agua cuando la profundidades 2.5 m.
6. La altura desde el suelo de una pelota que se deja caer desde una altura inicial de 122.5 m está dad por
$$s(t) = 122{,}5 - 4{,}9t^2$$
en donde s se mide en metros y t en segundos.
   a) ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = \frac{1}{2}$?
   b) ¿En qué instante choca la pelota contra el suelo?
   c) ¿Qué velocidad lleva en ese instante?
7. Un cohete es lanzado verticalmente y seguido por una cámara de televisión situada a 2 km del punto de partida. Si la cámara gira a razón de 4.5 grados por segundo, ¿a que altura se encuentra el cohete en el instante en que se eleva a razón de 100π metros por segundo?

Máximos y mínimos

1. Encuentre los máximos y mínimos absolutos y locales (si los hay) de la función dada en el intervalo que se indica:

(1) $f(x) = |x^2 - 1|$, $-2 \leq x \leq 2$.

(2) $g(x) = x - \sqrt{x}$, $0 \leq x < 1$.

(3) $h(x) = x + |x|$, $-1 < x \leq 1$.

(4) $f(x) = x^3 - |x|$, $-1 \leq x < 1$.

(5) $g(x) = 2x^2 - x^3$, $-1 \leq x < 2$.

(6) $h(x) = |\sin(x)|$, $-\infty < x < \infty$.

(7) $f(x) = 2 - \sin(x)$, $-\pi < x < \pi$.

(8) $g(x) = \frac{2}{2x^2+1}$, $-1 \leq x < 1$.

(9) $h(x) = x^{\frac{2}{3}} - x$, $0 \leq x \leq 8$.

2. Encuentre los puntos críticos de la función dada sobre el intervalo que se indica.

(1) $f(x) = 2x - x^2$, $[0, 2]$.
(2) $g(x) = x - x^{\frac{2}{3}}$, $[0, 8]$.
(3) $h(x) = \frac{x^2}{x^3-2}$, $[-2, \frac{1}{2}]$.
(4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $[-2, 2]$.
(5) $g(x) = \sin^2(x)$, $[-\pi, \pi]$.
(6) $h(x) = x^3 - 2x^2 + 2$, $[-1, 2]$.
(7) $f(x) = x^2 - 2^x$, $[0, 4]$.
(8) $g(x) = |x - 2\sin(x)|$, $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.
(9) $h(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2$, $[-2, 1]$.
(10) $f(x) = \frac{1}{t^2+1}$, $[-1, 1]$.
(11) $g(x) = \sqrt{\frac{4-x^3}{x^2}}$, $[-3, 0]$.

3. Halle las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo inscrito en una esfera de radio a.

4. Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo inscrito en un cono circular recto de radio a y altura h.

5. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima limitado por la recta $y = 4$ con dos de sus vértices sobre la parábola $y = x^2$.

6. Las longitudes de los lados de un triangulo isósceles son 10,10 y 12 centímetros. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima máxima inscrito con dos de sus vértices de dicho triangulo.

7. Encuentre las dimensiones del triangulo isósceles de área mínima que se puede circunscribir a un semicírculo de radio a.

Teorema del valor medio

1. En los siguientes ejercicios, verifique que cada función satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[a, b]$ que se indica y encuentre los números c en (a, b) tales que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

(1) $f(x) = x^2$, $[0, 2]$.
(2) $g(x) = x^3$, $[0, 1]$.
(3) $h(x) = \sin(x)$, $[0, \frac{\pi}{2}]$.
(4) $f(x) = x - x^2$, $[-3, 2]$.
(5) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $[0, 1]$.

2. Si una partícula se mueve a lo largo de una línea recta recorriendo $4t - t^2$ metros en t segundos; demuestra que entre 0 y 4 segundos hay un instante en que su velocidad es cero.

3. Consideré la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } x > 0. \end{cases}$. Demuestre que no existe c en $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué no contradice este hecho el teorema de Rolle?

3. Consideré la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{3-x}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$. Demuestre que f es continua en $[0, 2]$ y que no existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$. ¿Por qué no contradice este hecho el teorema del valor medio?

4. Un auto se mueve en una línea recta recorriendo $s(t)$ kilómetros en t horas. Si la función de posición s es diferenciable en todo instante t, y si el auto recorrió 240 kilómetros en 3 horas; demuestre que durante este recorrido existe al menos un instante t_0 en el que la velocidad del auto fue de 80 $\frac{km}{h}$.

5. Usando el teorema del valor medio, demuestre que la gráfica de una función cuya derivada es constante en todo punto x, es una recta.

6. Supóngase que las funciones f y g son tales que:

   - g y $f \circ g$ son continuas en $[a, b]$ con $a \neq b$
   - g y $f \circ g$ son diferecniables en (a, b)
   - $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a,b)

   Demuestre que existe c en (a, b) tal que $\frac{f(g(b))-f(g(a))}{g(b)-g(a)} = f'(g(c))$.

Funciones monótonas

Encuentre los intervalos en los que la función dada es creciente y en los que es decreciente.

(1) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

(2) $g(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1$.

(3) $h(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$.

(4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(5) $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

(6) $h(x) = x^2 - 2|x|$

(7) $f(x) = (1 - x^2)^2$

(8) $g(x) = \ln(x^2)$

(9) $h(x) = \frac{1}{1-e^{|x|}}$

(10) $f(x) = \frac{x}{1+\ln(x)}$