Funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sumas

1. Gráfique los siguientes logaritmos:
   - $(0,\infty) \ni x \xmapsto{\log_{2/3}} \log_{2/3}(x) \in \mathbb{R}$,
   - $(0,\infty) \ni x \xmapsto{\log_{2}} \log_{2}(x) \in \mathbb{R}$,
   - $(0,\infty) \ni x \xmapsto{\log_{0,5}} \log_{0,5}(x) \in \mathbb{R}$
   - $(0,\infty) \ni x \xmapsto{\log_{3}} \log_{3}(x) \in \mathbb{R}$
2. Demuestre las siguientes propiedades de los logaritmos (se vio en clase, pero la idea es que lo hagan sin ver las notas). Sean $M, N \in (0,\infty)$, $a, b \in (0,1)\cup(1,\infty)$ y $n \in \mathbb{N}$ (en general, $x \in \mathbb{R}$);
   - $\log_a(MN) = \log_a(M) + \log_a(N)$,
   - $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log(M) - \log(N)$,
   - $\log_a(M^n) = n\log_a(M)$,
   - $\log_b(M) = \frac{\log_a(M)}{\log_a(b)}$.
   - Si $p \in \mathbb{R}$, entonces $\log_a(M^p) = p\log_a(M)$
3. Resuelva las siguientes ecuaciones:
   a. $3^x = 48$
   b. $2^x = \frac{8}{27}$
   c. $2^{x+1} + 4 = 80$
   d. $2(3^x) - 3^{2x} + 3 = 0$
   e. $2^{x+1} = 16$
   f. $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$
   g. $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5}$
   h. $e^{2x} - e^{x+1} + e^2 = 0$
   i. $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} + 2^{x+5} + 2^{x+6} = 31$
   j. $2^{x+1} = 4^{2x-4}$
   k. $2\log_{10}(x) + \log_{10}(3) = \log_{10}(75)$
   l. $\log_2(w^2 + 4w + 3) = 4 + \log_2(w^2 + w)$, $w \neq -1$
   m. $16\log_2(x) + 4\log_4(x) + 2\log_{16}(x) = 37$, $x > 0$.
   n. $6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-4}{3}} = 1{,}89$
   o. $\log_2(8y-1) - 2\log_2(y+1) = 3 - \log_2(y+4)$
   p. $\log_2(x) = \log_4(2)$
   q. $\log_3(x) = \log_9(27)$
4. Supongamos que $x = 2^p$ y $y = 4^p$, muestre que $\log_2(x^3y) = 3p + 2q$.

5. ¿Cuando las funciones trigonométricas tienen inversa? Es decir, ¿qué restricciones debo considerar para que dichas funciones sean biyectivas?

6. Grafique las funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente

7. Proporciones las inversas de las funciones trigonométricas, dando el dominio adecuado y grafiquelas

8. Demuestre las siguientes identidades trigonométricas:

   - $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$
   - $\mathrm{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
   - $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

9. Use inducción matemática para demostrar las siguientes formulas:

   - Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
   - Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   - Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

10. Sea $\langle a_j \rangle_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i) = a_{n+1}-a_1$$

11. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y $j \in \mathbb{N}$, considere $(j+1)^k - j^k$, ¿como se factoriza? Una vez dado esta respuesta, úsela para que a partir de esa formula y de $S_0 = 1^0 + \cdots + n^0 = 1 + \cdots + 1 = n$ obtengas las formulas previas y en general poder obtener formulas para las sumas

$$S_k := \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

    NOTA: Es necesario hacerlo de manera inductiva, es decir, para $k=1$, luego para $k=2$ (se usa lo anterior), luego para $k=3$, etc.

12. ¿Quien es la suma $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x^i$?