Sumas, área bajo al curva con limites y definición de integral definida

1. Sean $\langle a_i\rangle_{i\in\mathbb{R}}$, $\langle b_j\rangle$ sucesiones en $\mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Muestre que las siguientes igualdades se cumplen:

   (1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = cn$

   (1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

   (2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

   (3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

2. Sean $a, x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 1$. Demuestre que

$$\sum_{l=0}^{m} ax^l = a\frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}.$$

3. Sea $x, a \in \mathbb{R}$ con $|x| < 1$. Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{m} ax^l = \frac{a}{x - 1}.$$

4. Recuerde que una serie es una sucesión de sumas parciales. Determine si las siguientes series convergen, es decir, determine si el siguiente limite $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, donde;

   - $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i(2i-1)}{n}$
   - $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left(\left(-2 + \frac{3i}{n}\right)^2 - \left(-2 + \frac{3i}{n}\right)^3\right)$
   - $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{i}{n}\right)^3\right)$

   En caso de que el limite no exista, justifique por qué.

5. Calcule el área de la región R usando sumas y limite.

   - R es la región acotada por la curva $y = -x^2 - 2x$, el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = 0$.
   - $R = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq |x^2 - 4|\}$.
   - R es la región acotada por el eje X, la recta $x = 1$ y por la gráfica de la función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 1, & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Calcule la integral definida el limite de las sumas de Riemann adecuadas.

1. $\displaystyle\int_a^b x^1 dx$,
2. $\displaystyle\int_a^b x^2 dx$,
3. $\displaystyle\int_a^b x^3 dx$,
4. $\displaystyle\int_a^b x^4 dx$,
5. $\displaystyle\int_{-2}^0 (x^2 - x^3 - 1) dx$,
6. $\displaystyle\int_0^2 (x^4 - x^3) dx$,
7. $\displaystyle\int_a^b x^n dx$,

6. Calcule la integral definida como limite de una sumas de Riemann.

   1. $\displaystyle\int_1^a \ln(x) dx$, con $a > 1$
   2. $\displaystyle\int_1^a \log_b(x) dx$, con $a > 1$ y $b \in (0, 1) \cup (1.\infty)$.