Teorema Fundamental del Cálculo y cambio de variable

1. Calcule la integral que se indica:

   a) $\displaystyle\int_0^3 (x^5 - x^4 + x)dx.$

   b) $\displaystyle\int_{-3}^3 (\sqrt{(2x-4)^2})dx.$

   c) $\displaystyle\int_2^3 \left(1 - \frac{3x}{2}\right)^2 dx.$

   d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^3 - 2t - 1}{\sqrt{t}} dt.$

   e) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}(1-x)dx.$

   f) $\displaystyle\int_1^5 \frac{x^3 - 1}{x^3} dx.$

   g) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2(w)dx.$

   h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt.$

   i) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{(x^2+1)^2}{x^2} dx.$

   j) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{\cos^2(x)} dx.$

2. Resuelva las siguientes integrales indefinidas.

   a) $\int \frac{dx}{1-\cos(x)}.$

   b) $\int \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)dx}.$

   c) $\int x^5(2+3x^3)^{\frac{2}{3}}dx.$

   d) $\int \sin^5(x)dx.$

   e) $\int (x^2 - 4x + 4)^{\frac{2}{3}}dx.$

   f) $\int \sqrt{1+\cos(x)}dx.$

   g) $\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}dx.$

3. Usando el teorema fundamental del calculo (No olvide la regla de la cadena) calcule el limite que se indica.

   i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}.$

   ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x t\sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$

   iii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{\cos(x)}{x}} dt.$

iv) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2 - x} \int_1^x (1 - 4t^2) dt.$

4. Calcule la derivada que se indica.

   i) $\frac{d}{dx} \int_0^x t \sin(t) dt.$

   ii) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^3+1} \sqrt{1 + t^2} dt.$

   iii) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \cos(\sqrt{t}) dt.$

   iv) $\frac{d}{dx} \left[\int_1^{\sqrt{x}} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{ds}{1 + s^2} \right) dt \right].$

   v) $\frac{d}{dx} \int_1^{(x^2+1)\cos(2x)} \frac{dt}{t} dt.$

   vi) $\frac{d}{dx} \int_1^{\sqrt{x^2+1}} \sin(t^2) dt.$

5. Si $F(t) = \int_1^{\frac{1}{t}} \sin(\sqrt{s}) ds$ con $t \geq 1$ y $G(x) = \int_{2\pi}^{x^2} F'(t) dt$ para cada $x \geq \frac{2}{\pi}$, calcule $G'(\frac{2}{\pi})$.

6. Calcule $\int \frac{x}{1+x^4} dx$.

7. Si a y b son números positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^a (1 - x)^b dx = \int_0^1 x^b (1 - x)^a dx.$$

8. Si $a > 0$ y si $\int_0^a u(a - u)(u - 1) du = 0$, demuestre que $a = 2$.

9. Demuestre que $\lim_{n \to \infty} \int_2^n \frac{dx}{x^p}$ existe, sólo si $p > 1$.