Tarea 11. Logaritmos.

1. Gráfique los siguientes logaritmos:
   - $(0,\infty) \ni x \xmapsto{\log_{2/3}} \log_{2/3}(x) \in \mathbb{R}$,
   - $(0,\infty) \ni x \xmapsto{\log_{2}} \log_{2}(x) \in \mathbb{R}$,
   - $(0,\infty) \ni x \xmapsto{\log_{0,5}} \log_{0,5}(x) \in \mathbb{R}$
   - $(0,\infty) \ni x \xmapsto{\log_{3}} \log_{3}(x) \in \mathbb{R}$
2. Demuestre las siguientes propiedades de los logaritmos (se vio en clase, pero la idea es que lo hagan sin ver las notas). Sean $M, N \in (0,\infty)$, $a, b \in (0,1) \cup (1,\infty)$ y $n \in \mathbb{N}$ (en general, $x \in \mathbb{R}$);
   - $\log_a(MN) = \log_a(M) + \log_a(N)$,
   - $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log(M) - \log(N)$,
   - $\log_a(M^n) = n\log_a(M)$,
   - $\log_b(M) = \frac{\log_a(M)}{\log_a(b)}$.
   - Si $p \in \mathbb{R}$, entonces $\log_a(M^p) = p\log_a(M)$
3. Resuelva las siguientes ecuaciones:
   a. $3^x = 48$
   b. $2^x = \frac{8}{27}$
   c. $2^{x+1} + 4 = 80$
   d. $2(3^x) - 3^{2x} + 3 = 0$
   e. $2^{x+1} = 16$
   f. $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$
   g. $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5}$
   h. $e^{2x} - e^{x+1} + e^2 = 0$
   i. $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} + 2^{x+5} + 2^{x+6} = 31$
   j. $2^{x+1} = 4^{2x-4}$
   k. $2\log_{10}(x) + \log_{10}(3) = \log_{10}(75)$
   l. $\log_2(w^2 + 4w + 3) = 4 + \log_2(w^2 + w)$, $w \neq -1$
   m. $16\log_2(x) + 4\log_4(x) + 2\log_{16}(x) = 37$, $x > 0$.
   n. $6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-4}{3}} = 1{,}89$
   o. $\log_2(8y - 1) - 2\log_2(y + 1) = 3 - \log_2(y + 4)$
   p. $\log_2(x) = \log_4(2)$
   q. $\log_3(x) = \log_9(27)$
4. Supongamos que $x = 2^p$ y $y = 4^p$, muestre que $\log_2(x^3y) = 3p + 2q$.

5. Simplifique $\log_{10}(10+3\sqrt{10})+\log_{10}\left(10+\sqrt{90+\sqrt{90}}\right)+\log_{10}\left(10-\sqrt{90+\sqrt{90}}\right)$

6. Se introdujo en un parque una población P de una especie de animales en peligro de extinción. La población obedece a la ecuación:
$$P=\frac{125ka^t}{k+2a^t}, t\geq 0$$
donde k y a son constantes positivas, y t es el tiempo en años desde que la especie fui introducida en el parque. Inicialmente se introdujeron 100 animales individuales en el parque, y esta población se duplico en 5 años. Resuelva:
   - Muestre que $k=8$.
   - Encuentre el valor de a, correcto con 4 cifras significativas (si usa calculadora, de lo contrario solo simplifique la expresión).
   - Determine el valor de t cuando $P=400$.
   - Explique porque esta población no puede exceder los 500.

7. Resuelva la siguiente ecuación logarítmica: $\frac{\log_4(x^2)}{5+\log_4(x^2)}+(\log_4(x))^2=0$

8. Resuelve la siguiente ecuación:
$$\left(a^4-2a^2b^2+b^4\right)^{x-1}=(a-b)^{2x}(a+b)^{-2}$$

9. ¿Quien es más grande entre $\sqrt[8]{8!}$ y $\sqrt[9]{9!}$?