Matemáticas Discretas
UnADM DCEIT

Dr. Juan Carlos Cruz González

Actualización: 20 de febrero de 2024

Índice general

Introducción

La Matemática Discreta es una rama fascinante y fundamental de las matemáticas que se ocupa del estudio de estructuras y objetos que son discretos en naturaleza. A diferencia de la Matemática Continua, que se enfoca en el análisis de cantidades y conceptos continuos, la Matemática Discreta aborda problemas relacionados con conjuntos finitos o contables.

En este libro, exploraremos tres áreas principales de la Matemática Discreta: sistemas numéricos, teoría de gráficas y discretización. Estos temas, aunque distintos en su enfoque, comparten la misma esencia de la discreción y su aplicación en diversos campos de estudio.

Comenzaremos nuestro recorrido examinando los sistemas numéricos. Aquí, nos sumergiremos en el fascinante mundo de los números enteros, racionales e irracionales, así como en las bases numéricas y su representación. Exploraremos las propiedades y operaciones fundamentales de estos sistemas, así como su relación con otros conceptos matemáticos.

Posteriormente, nos adentraremos en la teoría de gráficas, un área que encuentra aplicaciones en ciencias de la computación, redes, optimización y muchas otras disciplinas. Exploraremos los conceptos de vértices, aristas y grafos, y estudiaremos las propiedades y algoritmos asociados a estas estructuras. A través de ejemplos prácticos, descubriremos cómo las gráficas pueden ser utilizadas para modelar y resolver problemas del mundo real.

Finalmente, nos sumergiremos en la discretización en teoría de gráficas.

A lo largo de este libro, nos sumergiremos en conceptos matemáticos fascinantes y poderosos, explorando su relación con el mundo real y las aplicaciones prácticas que ofrecen. Nuestro objetivo es proporcionar una introducción clara y accesible a la Matemática Discreta, que inspire a los lectores a adentrarse en este campo y a apreciar su belleza y utilidad en diversas disciplinas. Es importante mencionar que en estas notas $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, denotan a los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos respectivamente. Sin más, ¡Comencemos nuestro viaje hacia el mundo de lo discreto y descubramos las maravillas que nos esperan!

Capítulo 1

Sistemas numéricos

Los sistemas numéricos son conjuntos de símbolos y reglas que se utilizan para representar y contar cantidades. Los cuatro sistemas numéricos más comunes son el decimal, binario, octal y hexadecimal. Cada uno tiene sus propias características y aplicaciones en diversos campos, como la informática, la electrónica y las matemáticas.

1. **Sistema Decimal**: El sistema decimal es el más utilizado en la vida cotidiana. Está basado en la base 10 y utiliza diez símbolos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Cada posición en un número decimal tiene un valor asociado según su posición en la secuencia. Por ejemplo, en el número 365, el 3 representa $300 = 3(10^2)$, el 6 representa $60 = 6(10^1)$, y el 5 representa $5 = 5(10^0)$. El valor total del número es la suma de estos valores parciales: $300 + 60 + 5 = 365$.

2. **Sistema Binario**: El sistema binario es fundamental en la electrónica y la informática. Está basado en la base 2 y utiliza solo dos símbolos: 0 y 1. Cada posición en un número binario tiene un valor asociado según su posición en la secuencia. El valor de cada posición es una potencia de 2. Por ejemplo, en el número binario 101, el 1 representa $4 = 1(2^2)$, el 0 no tiene valor, pero representa a $0(2^1)$, y el 1 representa $1 = 1(2^0)$. El valor total del número binario es la suma de estos valores parciales: $4 + 0 + 1 = 5$.

3. **Sistema Octal**: El sistema octal está basado en la base 8 y utiliza ocho símbolos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Cada posición en un número octal tiene un valor asociado según su posición en la secuencia. El valor de cada posición es una potencia de 8. Por ejemplo, en el número octal 52, el 5 representa $40 = 5(8^1)$, y el 2 representa $2 = 2(8^0)$. El valor total del número octal es la suma de estos valores parciales: $40 + 2 = 42$.

4. **Sistema Hexadecimal**: El sistema hexadecimal está basado en la base 16 y utiliza dieciséis símbolos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$. Los símbolos A hasta F representan los valores 10 hasta 15, respectivamente. Cada posición en un número hexadecimal tiene un valor asociado según su posición en la secuencia. El valor de cada posición es una potencia de 16. Por ejemplo, en el número hexadecimal $1A3$, el 1 representa $256 = 1(16^2)$, el A representa $160 = 10(16^1)$, y el 3 representa $3 = 3(16^0)$. El valor total del número hexadecimal es la suma de estos valores parciales: $256 + 160 + 3 = 419$.

En resumen, estos sistemas numéricos son fundamentales en diversas áreas, especialmente en la informática, donde se utilizan para representar y manipular datos binarios de manera más compacta y eficiente. Cada sistema tiene sus propias reglas y aplicaciones, y la conversión entre ellos es esencial en ciertas situaciones para poder trabajar con diferentes bases de numeración.

1.1. Números enteros

Para fines prácticos y sin entrar en controversia si el cero es o no número natural (para mi lo es porque soy mexicano y para los mayas el cero era natural), consideraremos al conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, es decir,

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y a $\mathbb{N}_0$ como el conjunto que resulta de unir a $\mathbb{N}$ con $\{0\}$, esto es, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. En general en este trabajo denotaremos como $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ a los números enteros, racionales y reales, respectivamente.

El Principio de Inducción Matemática (PI) junto con su equivalente, el Principio del Buen Orden (PBO), son herramientas sumamente valiosas en el ámbito de las matemáticas. Estos principios son fundamentales para probar teoremas y propiedades en matemáticas, especialmente en áreas como aritmética, teoría de números y álgebra. Su aplicación proporciona una herramienta poderosa para demostrar la validez de enunciados en el conjunto de los números naturales o en subconjuntos bien ordenados. Gracias a su versatilidad y eficacia, el Principio de Inducción Matemática y el Principio del Buen Orden son ampliamente utilizados y considerados esenciales en el estudio y desarrollo de la teoría matemática.

Principio de Inducción Matemática (PI): *Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que S satisface las siguientes propiedades:*

a) $1 \in S$.

b) Si $\{1, 2, \dots, n\} \subseteq S$, entonces $n + 1 \in S$.

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Ahora, sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ un conjunto finito y consideremos el siguiente orden en $\mathbb{N}_X := X \cup \mathbb{N}$:

$$x_i \leq x_j \text{ si } i \leq j \text{ y } x_i < n \text{ para } i = 1, 2, \dots, r \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, reetiquetando los elementos de $\mathbb{N}_X$ como sigue: para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_{r+i} = i$. Obtenemos que $X \cup \mathbb{N} = \{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots\}$. De esta manera, podemos extender la definición el principio de inducción matemática a $\mathbb{N}_X$ como sigue: para $S \subseteq X \cup \mathbb{N}$ tal que

a) $x_1 \in S$.

b) Si $x_1, \dots, x_n \in S$, entonces $x_{n+1} \in S$.

Entonces $S = X \cup \mathbb{N}$.

En particular, el PI es válido en $\mathbb{N}_0$. Para tener un mejor dominio del PI les sugiero consultar el libro de **Método de Inducción Matemática** de *I.S. Sominski*.

Principio del Buen Orden (PBO): *cualquier subconjunto $S \neq \emptyset$ de $\mathbb{N}$ tiene un elemento m que cumple que para todo $n \in S$, $m \leq n$.* Puede probarse que el numero m es único y esto es bastante útil. Al igual que el principio de inducción matemática, el PBO puede ser extendido a $\mathbb{N}_X$ como sigue: cualquier subconjunto $S \neq \emptyset$ de $\mathbb{N}_X$ tiene un elemento x_i que cumple que $x_i \leq x_j$ para todo $x_j \in S$.

Teorema 1.1.1. *En $\mathbb{N}_X$, el Principio del Buen Orden es equivalente al Principio de Inducción.*

Dem.
Supongamos que el PBO se cumple y veamos que el PI se cumple, para ello, sea $S \subseteq \mathbb{N}_X$ tal que satisface a y b del PI. Supongamos que $S \neq \mathbb{N}_X$, entonces su complemento (S^c) con respecto a $\mathbb{N}_X$ es distinto de vació, entonces por el PBO existe $x_m \in S$ tal que $x_m \leq x_n$ para todo $x_n \in S^c$ y obsérvese que $x_m \neq x_1$ pues $x_1 \in S$. Ahora, $x_{m-1} \notin S^c$, pues x_m es mínimo, entonces $x_{m-1} \in S$ y por la condición b, se sigue que $x_m = x_{m-1+1} \in S$, es decir, $x_m \in S \cap S^c$ y esto es una contradicción. Por lo tanto, $S = \mathbb{N}_X$.

Ahora, supongamos que PI es válido y sea $S \subseteq N_X$ no vacío. Supongamos que S no tiene un elemento mínimo. Claramente, $x_1 \notin S$, pues si lo estuviera sería el elemento mínimo. Ahora, sea

$$\Omega = \{x_i \in \mathbb{N}_X : x_i < x, \text{ para cualquier } x \in S\},$$

entonces $x_1 \in \Omega$, pues ya dijimos que no puede estar en S, por lo tanto $\Omega \neq \emptyset$. Supongamos que $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \Omega$ y mostremos que $x_{n+1} \in \Omega$. Si $x_{n+1} \notin \Omega$, entonces existe $x_j \in S$ tal que $x_j \leq x_{n+1}$ y como estamos suponiendo que S no tiene elemento menor, entonces existe $x_i \in S$ tal que $x_i < x_j \leq x_{n+1}$. Así que $x_i < x_{n+1}$ y en consecuencia $x_i \leq x_n$. Este último no es posible pues $x_n < x_i$. Por lo tanto, $x_{n+1} \in X$ y por el PI se sigue que $C = \mathbb{N}_X$. Esto es, si $x \in S$, entonces $x \in C$, es decir, $x < x$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, S debe tener elemento mínimo, es decir, existe $x_m \in S$ tal que $x_m \leq x$ para todo $x \in S$.

Q.E.D

El siguiente teorema es muy importante y es la justificación formal del por qué podíamos realizar las divisiones justo como nos los enseñaron en la educación primaria.

Teorema 1.1.2 (Algoritmo de la división)**.** *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$. Existen únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que*

$$b = aq + r \text{ donde } 0 \leq r < |a|.$$

Dem.
Sea $S = \{b - am \in \mathbb{N}_0 : m \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}_0$. Obsérvese que si $\omega_0 = -ab^2 \in \mathbb{Z}$, entonces $b - a\omega_0 = b - a(-ab^2) = b + a^2b^2 = (b)(1 + ba^2) \in \mathbb{N}_0$, pues

- si $b < 0$, entonces $ba^2 < 0$. Implica que $ba^2 \leq -1$. Así, $1 + ba^2 \leq 0$, por lo que $(b)(1 + ba^2) \geq 0$. Por lo tanto, $b - a\omega_0 \in \mathbb{N}_0$.
- Si $b = 0$, entonces $b - a\omega_0 = 0 \in \mathbb{N}_0$.
- Si $b > 0$, entonces $b + a^2b^2 > 0$, es decir, $b - a\omega_0 \in \mathbb{N}_0$.

Por lo que, $S_0 \neq \emptyset$. Por el PBO S_0 tiene un elemento menor, es decir, existe $r \in S_0$ tal que $r \leq n$ para toda $n \in S_0$. Y dado que $r \in S_0$, entonces $r = b - aq$ para algún $r_q \in \mathbb{Z}$, esto es, $b = aq + r$. Ahora, dado que $a \neq 0$, entonces $a \geq 1$ ó $a \leq -1$:

- si $a \geq 1$, entonces
$$b - a(q+1) = b - aq - a < r - a < r,$$
así
$$b - a(q+1) < 0.$$
En consecuencia $b - a(q+1) < 0$, pues de lo contrario $b - a(q+1)$ estaría en S_0 el cual no es posible por que r es mínimo. Por lo tanto, $r = b - aq < a = |a|$.
- si $a \leq -1$, entonces
$$b - a(q-1) = b - aq + a < r + a < r,$$
así
$$b - a(q-1) < 0.$$
En consecuencia $b - a(q-1) < 0$, pues de lo contrario $b - a(q-1)$ estaría en S_0 el cual no es posible por que r es mínimo. Por lo tanto, $r = b - aq < -a = |a|$.

Entonces $0 \leq r \leq |a|$. Finalmente veamos la unicidad de q y r. Supongamos que

$$aq_1 + r_1 = b = aq_2 + r_2$$

con $0 \leq r_1 < |a|$ y $0 \leq r_2 < |a|$. De la igualdad se sigue que $a(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ y de las desigualdades se tiene que $-|a| < -r_1 \leq 0$ y $0 \leq r_2 < |a|$, entonces $-|a| < r_2 - r_1 < |a|$. Así,

$$-|a| < a(q_1 - q_2) < |a|.$$

Dividiendo entre $|a|$ a la desigualdad, obtenernos:

$$-1 < \frac{a}{|a|}(q_1 - q_2) < 1.$$

Y dado que $\frac{a}{|a|} \in \{-1, 1\}$ y $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, entonces $q_1 - q_2 = 0$, esto es, $q_1 = q_2$, en consecuencias, $r_1 = r_2$. Esto prueba la unicidad de q y r.

Q.E.D

El algoritmo de la división es una herramienta fundamental en la representación de números enteros en cualquier base numérica. Ya sea que estemos trabajando en el sistema decimal, binario, hexadecimal o cualquier otra base, este algoritmo nos permite realizar divisiones entre números enteros de manera eficiente y precisa. El siguiente teorema nos dice que todo numero natural puede ser representado en cualquier base ¡¡b¿¿ mayor que 2 de forma única.

Teorema 1.1.3. *Sea $b \in \mathbb{N}$ con $b > 1$. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces n tiene una representación única de la forma*

$$n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_k b^k,$$

con $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq a_i < b$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ y $b_k \neq 0$.

Dem.
Para la existencia de dicha representación usaremos inducción matemática. Sea

$$S = \{n \in \mathbb{N} : n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_k b^k \text{ con } k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq a_i < b \text{ para cada } i \in \{0, 1, \ldots, k\} \text{ y } b_k \neq 0\}.$$

Claramente, $n = 1 \in S$. Ahora, supongamos que $\{1, \ldots, n\} \subseteq S$, veamos que $n + 1 \in S$, por el algoritmo de la división se sigue que existen $q, r \in \mathbb{Z}$ únicos tales que

$$n + 1 = bq + r, \text{ con } 0 \leq r < b$$

Como $n + 1, r, b$ son mayores o iguales que cero, entonces q debe mayor o igual que cero. Ahora,Si $q = 0$, entonces $n + 1 = r$ es la representación buscada, si $q \leq n + 1$, entonces $bq \geq b(n + 1) > n + 1$ (pues $b > 1$), así$n + 1 > bq + r > n + 1$ lo cual no es posible, por lo tanto, $0 \leq q < n + 1$. Así, $0 \leq q \leq n$, entonces por hipótesis de inducción se sigue que:

$$q = a_0 + a_1 b + \cdots + a_k b^k \text{ con } k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq a_i < b \text{ para cada } i \in \{0, 1, \ldots, k\} \text{ y } b_k \neq 0.$$

Así, $n + 1 = r + a_0 b + a_1 b^2 + \cdots + a_k b^{k+1}$, por lo que $n + 1 \in S$. Por lo tanto, por el principio de inducción matemáticas, se sigue que $S = \mathbb{N}$, esto es, que todo elemento $x \in \mathbb{N}$ tiene una representación como se desea, solo falta revisar que dicha representación es única. Para ello, supongamos que

$$a_0 + a_1 b + \cdots + a_n b^n = x = c_0 + c_1 b + \cdots + c_m b^m,$$

con $a_k \neq 0$, $c_m \neq 0$ y $0 \leq a_i, c_j < b$ para $i \in \{0, \ldots n\}$ y $j \in \{0, \ldots n\}$. Veamos que $n = m$ y que $a_i = c_i$ para cada i. Supongamos que no ocurre esta última afirmación, es decir, nuestra afirmación es falsa. Entonces, sea $l = \max\{n, m\}$, tenemos

$$0 = h_0 + h_1 b + \cdots h_l a^l, \qquad h_l \neq 0$$

con $h_i = a_i - c_i$ para $i \in \{0, \ldots, \min\{n, m\}\}$ y $h_i = a_i$ ó $h_i = -c_i$ para $i \in \{\min\{n, m\} + 1, \ldots, l\}$ si $l = n$ ó $l = m$, respectivamente. Ahora, como para todo $j \in \{0, \ldots, m\}$, $0 \leq c_j < b$, entonces $-b < c_i \leq 0$ y dado que para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, $0 \leq a_1 < b$ y, se sigue que $b < h_i < b$ para toda $i \in \{1, \ldots, l\}$. Así,

$$\begin{aligned}
b^l &\leq |h_l b^l| = |-h_0 - h_1 a - \cdots - h_{l-1} b^{l-1}| = |h_0 + h_1 b + \cdots + h_{l-1} b^{l-1}| \\
&\leq |h_0| + |h_1| b + \cdots + |h_{l-1}| b^{l-1} \\
&\leq (b-1) + (b-1)b + \cdots + (b-1)b^{l-1} = (b-1)(1 + b + \cdots + b^{l-1}) = b^l - 1
\end{aligned}$$

Lo cual no es posible, por lo tanto ambas representaciones son iguales.

Q.E.D

■ **Ejemplo 1.1.4.** *Consideremos el número 2024 que esta descrito en base decimal, es decir,*

$$2024 = 4 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3.$$

Ahora, si consideramos $b = 2$, entonces

$$2024 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^{10}$$

La pregunta natural es, ¿y como se obtuvo esa expansión? La respuesta es que al analizar un poco a profundidad la primera parte de la demostración del Teorema 1.1.2, específicamente en el paso inductivo, es decir, en el paso en que se prueba que $n + 1 \in S$, podemos observar que aplicamos el algoritmo de la división al cociente «q» y luego el paso inductivo, pero en el fondo es como aplicar inductivamente el algoritmo de la división a los cocientes, esto es: si $n, b \in \mathbb{N}$ con $b > 2$ fijo, entonces por el algoritmo de la división existen únicos $q_0, r_0 \in \mathbb{N}_0$ tales que:

$$n = q_0 b + r_0, \text{ donde } 0 \leq r_0 < b.$$

Aplicamos el algoritmo de la división a q_0, entonces existen únicos $q_1, r_1 \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$q_0 = q_1 b + r_1, \text{ donde } 0 \leq r_1 < b.$$

Aplicamos el algoritmo de la división a q_1, entonces existen únicos $q_2, r_2 \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$q_1 = q_2 b + r_2, \text{ donde } 0 \leq r_2 < b.$$

Y así sucesivamente, este proceso es finito y se estaciona en algún paso k produciendo residuos $r_0, r_2, \ldots, r_k$