Fundamentos Matemáticos para CBI (UAMI)

Juan Carlos Cruz González

Notas 2023

Índice general

Introducción

En el vasto dominio de las matemáticas, la comprensión y dominio de los fundamentos son cruciales para el éxito en disciplinas más avanzadas. Este texto se propone sumergir al lector en un análisis riguroso de los pilares matemáticos fundamentales: la lógica, el campo de los números reales, la teoría de conjuntos y las funciones elementales. Estos conceptos, a menudo considerados como la antesala de disciplinas más especializadas, forman la base inquebrantable sobre la cual se erige la arquitectura matemática.

Comenzamos nuestro recorrido en la lógica básica, la disciplina que establece las reglas formales del razonamiento matemático. A través de una exposición básica, intuitiva y a la vez un poco meticulosa, abordaremos los principios fundamentales de la verdad y la inferencia, explorando la estructura de argumentos válidos y la construcción de pruebas lógicas sólidas, sin entrar más allá de lo necesario y suficiente para nuestro objetivo.

Los números reales, un conjunto que abarca desde los familiares números enteros hasta los complejos números irracionales, si bien no hablaremos de su construcción rigurosa, pues eso requiere de conocimiento más abstracto y por ende más tiempo si que exploraremos propiedades importantes que nos permitirán manipularlos, es decir, desarrollaremos una comprensión sólida de las propiedades y relaciones que caracterizan este conjunto, subrayando su papel esencial en aplicaciones matemáticas y científicas.

La teoría de conjuntos, un marco conceptual que proporciona un lenguaje común para describir estructuras matemáticas, será presentada de manera intuitiva pero suficiente. Exploraremos la clasificación y manipulación de conjuntos, revelando cómo esta teoría se convierte en una herramienta esencial en la construcción de argumentos matemáticos más avanzados.

Las funciones, piezas fundamentales del rompecabezas matemático, serán examinadas en su forma más elemental pero lo suficiente para su comprensión. Desde funciones lineales hasta aquellas más complejas, exploraremos cómo estas entidades matemáticas modelan fenómenos y relaciones en una variedad de disciplinas.

Este notas está diseñado principalmente para el estudiante de la **Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa** en su **División de Ciencias Básicas e Ingeniería**. Y su principal objetivo es proveer de una comprensión profunda de los principios matemáticos fundamentales.

Capítulo 1

Lógica básica

La lógica desempeña un papel fundamental en las matemáticas, ya que proporciona un marco riguroso para el razonamiento deductivo y la demostración de teoremas matemáticos. La lógica establece reglas y estructuras para analizar y evaluar la validez de los argumentos matemáticos, asegurando la coherencia y consistencia del razonamiento. Veamos las siguientes razones clave sobre la importancia de la lógica en las matemáticas:

- *Rigor y precisión*: La lógica garantiza que las afirmaciones matemáticas sean rigurosas y precisas. Ayuda a evitar ambigüedades y garantiza que los resultados matemáticos sean sólidos y confiables. La lógica proporciona un lenguaje formal y un conjunto de reglas para expresar ideas matemáticas de manera clara y sin ambigüedades.
- *Demostración de teoremas*: La lógica es fundamental para la demostración de teoremas matemáticos. Proporciona herramientas y técnicas para estructurar y presentar argumentos válidos que respalden la veracidad de las afirmaciones matemáticas. La validez lógica de un razonamiento es esencial para establecer la verdad de un teorema.
- *Consistencia y coherencia*: La lógica ayuda a mantener la consistencia y coherencia en las matemáticas. Ayuda a evitar contradicciones y paradojas en los sistemas matemáticos. Al seguir reglas lógicas sólidas, se pueden identificar inconsistencias y resolver problemas que podrían surgir en el desarrollo de teorías matemáticas.
- *Fundamentos de la matemática*: La lógica proporciona los fundamentos teóricos de la matemática. Los sistemas axiomáticos y las estructuras lógicas subyacentes permiten construir y analizar diferentes áreas de las matemáticas, como el álgebra, la geometría, el cálculo y la teoría de conjuntos.
- *Aplicaciones en la computación*: La lógica matemática es la base de la ciencia de la computación y la programación. Los principios lógicos se utilizan para construir algoritmos, diseñar sistemas de hardware y software, y garantizar la corrección y consistencia de los programas informáticos.

En conclusión a lógica es esencial en las matemáticas porque proporciona un marco riguroso para el razonamiento y la demostración de teoremas. Ayuda a mantener la consistencia y coherencia en los sistemas matemáticos, y su aplicación se extiende más allá de las matemáticas en campos como la informática y la programación.

Esta sección nos centraremos en comprender lo necesario y suficiente para la demostración de teoremas. Sin embargo, si desea profundizar más en el tema, lo invito a revisar el texto [1] que esta escrita en español y consideró que es bastante comprensible y formal, por otro lado, los textos [2], [3] son buenos pero el inconveniente es que estan escritos en ingles.

1.1. Proposiciones

Una **proposición** es una oración declarativa o una expresión matemática que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas al mismo tiempo. Por lo tanto, una proposición tiene un **valor de verdad**, que puede ser **V** si es verdadera, o **F** si es falsa. Nos enfocaremos únicamente en proposiciones matemáticas.

■ **Ejemplos 1.1.1.** ***Los siguientes ejemplos son proposiciones verdaderas:***

- *La raíz cuadrada de 16 es igual a 4:* $\sqrt{16} = 4$.
- *El producto de cualquier número real por 0 es igual a 0:* $n \cdot 0 = 0$.
- *El valor absoluto de un número negativo es siempre positivo:* $|(-n)| = n$.
- *La suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre 180 grados:* $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
- *El número* π *es irracional.*
- *La suma de los ángulos externos de cualquier polígono siempre es 360 grados:* $\sum \theta_i = 360°$.
- *El producto de dos números negativos es siempre positivo:* $(-a) \cdot (-b) = ab$.

■ **Ejemplos 1.1.2.** ***Los siguientes son proposiciones falsas:***

- *El cuadrado de un número siempre es mayor que el número en sí mismo:* $n^2 > n$.
- *Vodos los triángulos isósceles son equiláteros.*
- *El resultado de dividir cualquier número entre cero es infinito:* $\frac{n}{0} = \infty$.
- *La suma de dos números irracionales es siempre irracional.*
- *La longitud de la circunferencia es igual al cuadrado de su radio.*

■ **Ejemplos 1.1.3.** ***Algunos ejemplos de expresiones que no son proposiciones son:***

- «*73*»
- «$x - 1 = 5$»
- «*¿Cuál es la solución de* $2x - 1 = 0$*?*»

Generalmente, para referirnos a proposiciones especificas se usan letras mayúsculas. Por ejemplo,

$P:$ 25 es un número entero par.

$Q:$ $3 + 5 = 8$.

$R:$ $2x + 3$ es una ecuación.

Las proposiciones pueden contener variables como lo son: $x.y, z$, etc. Por ejemplo:

$P:$ Para todo número real «x», existe un número real «y»tal que $y > x$.

Esta proposición es verdadera independientemente del valor de x. Entonces podemos denotarlas por:

$P(x):$ Para todo número real «x», existe un número real «y»tal que $y > x$.

Hay oraciones o expresiones matemáticas que contienen variables y no son proposiciones, por ejemplo:

$Q(a):$ a es un número entero que es divisible por 5.

Este enunciado solo adquiere el estatus de proposición cuando asignamos un valor específico a a (y así podemos determinar si es verdadera o falsa). Por ejemplo, $Q(3)$ es falsa y $Q(15)$ es verdadera. Una expresión como $Q(a)$, cuyo valor de verdad depende de una o más varibales, es lo que se llama una **expresión abierta**.

1.2. Conectivos Lógicos

Podemos emplear la conjunción «y»para combinar dos proposiciones y generar una nueva proposición. Veamos el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo 1.2.1.** *Consideremos dos proposiciones P, Q como sigue:*

P : *El número π es irracional.*

Q : *El número $\frac{1}{2}$ es racional.*

R: El número π es irracional ***y*** *El número $\frac{1}{2}$ es racional.*

En el ejemplo 1.2.1 tenemos que P, Q son verdaderas, entonces también lo es R. En general, dadas dos proposiciones P y Q, podemos combinarlas para formar una nueva proposición «P y Q». Usamos el símbolo $\wedge$ para indicar la palabra «**y**». De modo que $P \wedge Q$ significa «P **y** Q». La proposición $P \wedge Q$ es verdadera si ambos lo son, en cualquier otro caso, es falsa. Esto se resume en la siguiente **tabla de verdad**.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

En esta tabla, P y Q representan las dos proposiciones que queremos combinar con la conjunción «y»($\wedge$). La columna final muestra el resultado de la conjunción para cada combinación de los valores de P y Q. Donde «V»representa una proposición verdadera, y «F»representa una proposición falsa.

Además, es posible establecer una conexión entre dos proposiciones utilizando el término «o», generando así una proposición adicional. Esto es, dadas dos proposiciones P y Q, la afirmación «P **o** Q»significa que alguna de las dos puede ocurrir, en términos matemáticos el nuevo enunciado es verdadero si al menos una de las dos es verdadera. Se usa el símbolo $\vee$ para denotar la palabra «*o*». Así, $P \vee Q$ significa «P **0** Q». Veamos un ejemplo

■ **Ejemplo 1.2.2.** *Consideremos las proposiciones P y Q como siguen:*

P : *El número π es irracional*

Q : *El número π es racional*

$P \vee Q$: *El número π es irracional* ***o*** *el número π es racional*

En el ejemplo previo $P \vee Q$ es verdadera, pues P lo es. La tabla de verdad para $P \vee Q$ es la siguiente:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

También, es común negar oraciones y obtener con ello su enunciado opuesto. Dada una proposición P, podemos formar una nueva proposición «**no es cierto que** P». Usamos el símbolo $\neg$ para indicar la frase «no es cierto que».

■ **Ejemplo 1.2.3.** *Usando la notación correspondiente:*

P : *Matemáticas es difícil.*

$\neg P$: *Matemáticas no es difícil.*

La tabla de verdad para $P \vee Q$ es la siguiente:

P	$\neg P$
V	F
F	V

En nuestro idioma, empleamos oraciones condicionales, es decir, cuando sucede cierto evento, se produce una consecuencia determinada. Un ejemplo de esto sería: Si no dedico tiempo al estudio, obtendré una calificación baja. Estos conectores se conocen como condicionales. En el el lenguaje matemático; dadas P y Q proposiciones, podemos formar la nueva proposición «**Si** P, **entonces** Q». La representación simbólica de esta proposición es la siguiente; $P \Rightarrow Q$, la cual también se puede leer como «P implica Q»y se conoce como **proposición condicional**. Ahora, $P \Rightarrow Q$ establece una relación entre dos proposiciones: P y Q. P puede ser una afirmación o condición inicial, mientras que Q representa la consecuencia o resultado esperado. El significado de $P \Rightarrow Q$ nos dice que la única manera esta sea falsa, es que P sea verdadera y Q falsa. Así, la tabla de verdad es:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Las expresiones más comunes que significan $P \Rightarrow Q$ son:

- Si P, entonces Q.
- Q, si P.
- Q, siempre que P.
- P es una condición suficiente para Q.
- Q es una condición necesaria para P.
- P, solo si Q.

Veamos un ejemplo de la implicación en algunas de sus expresiones semánticas:

■ **Ejemplo 1.2.4.** *Si estudias, entonces aprobarás el examen.* P : *Estudias y* Q : *Aprobaras el examen.*

- *Aprobaras el examen, si estudias.*
- *Aprobaras el examen, siempre que estudias.*
- *Estudias, solo si aprobaras el examen.*

La proposición recíproca de una implicación $P \Rightarrow Q$ se obtiene intercambiando las proposiciones P y Q para formar la implicación $Q \Rightarrow P$. La **contrarrecíproca** (o **contrapositiva**) de $P \Rightarrow Q$ se obtiene al negar ambas proposiciones y luego intercambiarlas para formar la implicación $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Es importante tener en cuenta que la contrarrecíproca siempre tiene el mismo valor de verdad que la implicación original. Si la implicación original es verdadera, la contrarrecíproca también será verdadera, y si la implicación original es falsa, la contrarrecíproca también será falsa.

Ahora, dadas dos proposiciones P y Q, podemos considerar tanto $P \Rightarrow Q$ como $Q \Rightarrow P$. En primer lugar, $P \Rightarrow Q$ no es lo mismo que $Q \Rightarrow P$, pues tienen distinto significado y por lo tanto valores de verdad distintos. Si consideramos la proposición $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$, que sabemos que es verdadera cuando ambas lo son. Leemos $Q \Rightarrow P$ como «P si Q»y $P \Rightarrow Q$ como «P, solo si Q», en consecuencia, leemos $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ como «P, **si y solo si** Q», y el símbolo que usamos para la frase «si y solo si»es $\iff$, por tanto, denotaremos a $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ como $P \iff Q$. Una proposición de la forma $P \iff Q$ se conoce como **proposición bicondicional**.

■ **Ejemplo 1.2.5.** *Sea P : x es un número par y Q : x es divisible por 2.*

$P \Rightarrow Q$: *Si x es un número par, entonces x es divisible por 2.*

$Q \Rightarrow P$: P : *Si x es divisible por 2, entonces x es un número par.*

$P \iff Q$: *x es un número par, si y solo si, es divisible por 2.*

Usando el conocimiento que tenemos de las tablas de verdad de $\wedge$ y $\Rightarrow$ se puede obtener la tabla de verdad siguiente:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \iff Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Por lo que la tabla de verdad de $P \iff Q$ es:

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Toda proposición matemática tiene su tabla de verdad, hay casos especiales que merecen un nombre adecuado. Una proposición se llama **tautología** cuando su tabla de verdad es siempre verdadera y cuando es siempre falta se llama **contradicción**.

1.3. Equivalencias Lógicas

La equivalencia lógica se refiere a la relación entre dos proposiciones lógicas que tienen el mismo valor de verdad en todas las situaciones posibles. En otras palabras, dos proposiciones son **lógicamente equivalentes** si y solo si tienen la misma tabla de verdad.

Por ejemplo, las proposiciones $P \iff Q$ y $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ son lógicamente equivalentes:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$P \iff Q$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
V	V	F	F	V	F	**V**	**V**
V	F	F	V	F	F	**F**	**F**
F	V	V	F	F	F	**F**	**F**
F	F	V	V	F	V	**V**	**V**

Usamos el símbolo $\equiv$ para denotar la equivalencia lógica de dos proposiciones, en nuestro ejemplo tendremos:

$$P \iff Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$$

Unas ilustración relevantes de equivalencia lógica se puede encontrar en el siguiente en los siguientes casos:

$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P.$

$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q.$

Para verificar estas equivalencias, examinamos sus tablas de verdad:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	**F**
F	V	V	F	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**

P	Q	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
V	V	F	**V**	**V**
V	F	F	**F**	**F**
F	V	V	**V**	**V**
F	F	V	**V**	**V**

Hay varias equivalencias lógicas importantes que se utilizan comúnmente en la lógica proposicional. Algunas de las más conocidas son:

Ley de identidad:

$$P \wedge \mathbf{V} \equiv P$$
$$P \vee \mathbf{F} \equiv P$$

Ley de contradicción:

$$P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$$
$$P \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$$

Leyes de la negación:

$$\neg(\neg P) \equiv P$$
$$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$$
$$P \vee \neg P \equiv \mathbf{V}$$

Leyes conmutativas:

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$
$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

Leyes asociativas:

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$
$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

Leyes distributivas:

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

La verificación se plantea como ejercicio adicional.

1.4. Enunciados matemáticos

1.4.1. Definiciones

El concepto de **definición** es uno de los fundamentos esenciales en matemáticas y constituye uno de los primeros conceptos que se exploran en esta disciplina.. En matemáticas, una **definición** es una declaración precisa y clara que establece el significado de un concepto o término. Una definición tiene el propósito de proporcionar una descripción precisa y sin ambigüedades de un objeto, una propiedad o una relación matemática.

Una definición matemática generalmente se compone de dos partes: el término que se define y la descripción o características que lo distinguen. La descripción puede incluir propiedades, relaciones o condiciones que deben cumplirse para que el término sea aplicable.

Una buena definición en matemáticas es precisa, concisa y no ambigua, evitando cualquier tipo de ambigüedad o confusión en su interpretación. Además, es importante que una definición sea consistente con los conceptos y principios establecidos en el ámbito matemático.

Las definiciones matemáticas son fundamentales para establecer una base sólida en cualquier área de estudio matemático, ya que permiten un lenguaje preciso y comúnmente aceptado para comunicar ideas y teoremas.

Daremos, como ejemplo, algunas definiciones. Es fundamental tener en cuenta que no proporcionaremos definiciones para todo, ya que partiremos del supuesto de que el lector posee cierto nivel de familiaridad con;

- los números naturales: $\mathbb{N} : 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$,
- los números enteros: $\mathbb{Z} : \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$,
- los racionales: $\mathbb{Q}$ que son de la forma $\frac{a}{b}$ con a y b números enteros y $b \neq 0$,
- los irracionales que son los que no son racionales,
- los números reales $\mathbb{R}$ que es la unión de todos los anteriores.

y por su puesto que conoce las operaciones suma y producto con ellos, además de algo de álgebra elemental, así como ciertos conceptos sobre estos espacios.

Definición 1.4.1. *Dados dos enteros a y b, si $b = ac$, para algún entero c, diremos que a* ***divide*** *a b, y escribimos $a|b$. En esta situación, a es un* ***divisor*** *de b, y b es* ***múltiplo*** *de a.*

Por ejemplo, 3 divide a 15, pues $15 = 3(5)$. Escribimos esto como $3|15$, sin embargo 3 no divide a 13, pues no existe un entero c tal que $13 = 3c$. Escribimos esto como $3 \not| 13$ que se lee como «3 no divide a 13».

Definición 1.4.2. *Decimos que un número natural p mayor que 1 es* ***primo*** *si sus únicos divisores positivos son 1 y p .*

Ejemplo de números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

1.4.2. Proposiciones verdaderas: Teoremas, Lemas y Corolarios

En matemáticas, un **teorema** es una afirmación o proposición que ha sido demostrada rigurosamente y se considera verdadera dentro de un determinado sistema matemático. Los teoremas son fundamentales en la construcción y desarrollo de la teoría matemática, ya que proporcionan resultados importantes y establecen conexiones entre diferentes conceptos matemáticos.

Los teoremas pueden abarcar una amplia gama de áreas y ramas de las matemáticas, como el álgebra, la geometría, el cálculo, la teoría de números, la lógica y más. Algunos teoremas son conocidos por sus nombres propios, como el teorema de Pitágoras, el teorema de Fermat o el teorema fundamental del cálculo.

Los teoremas son fundamentales en matemáticas porque establecen verdades matemáticas basadas en un razonamiento lógico sólido y proporcionan las bases para el desarrollo y avance de nuevas ideas y teorías. También son utilizados para resolver problemas matemáticos y para establecer relaciones y propiedades dentro de diferentes áreas de estudio.

Los teoremas usualmente son proposiciones condicionales, es decir, del tipo $P \Rightarrow Q$, aunque a veces el enunciado del teorema o proposición a veces oculta este hecho. Para ejemplificar esto último veamos la siguiente proposición:

Teorema 1.4.3 (**Teorema de Pitágoras**). *En un triángulo rectángulo con lados de longitudes a, b y c, donde c es la hipotenusa, se cumple que*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Como este enunciado, no parece ser una proposición condicional, sin embargo podemos expresarla como una proposición condicional escribiendo:

Teorema 1.4.4. *Si un triángulo es un triángulo rectángulo con lados de longitudes a, b y c, donde c es la hipotenusa, entonces se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$.*

Cuando un teorema en matemáticas se puede expresar en forma de una condicional $P \Rightarrow Q$, la proposición P se llama **hipótesis** o conjunto de supuestos, y la consecuente(proposición) Q es la afirmación que se deduce a partir de la hipótesis, es decir, la **tesis**. En nuestro ejemplo, la hipótesis o antecedente es que el triángulo es un triángulo rectángulo con lados a, b y c, y la conclusión o consecuente es la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$. Cabe señalar que no todo teorema es una proposición condicional. Algunos tienen la forma bicondicional $P \iff Q$. Otros teoremas son simplemente proposiciones P.Por ejemplo,

Teorema 1.4.5. *Existe una infinidad de números primos*

Hay varias palabras que significan esencialmente lo mismo que la palabra «teorema». En general «teorema»se reserva para proposiciones significativas o importantes (por ejemplo, el Teorema de Pitagóricas). Una proposición verdadera, pero no significativa, se llama simplemente **proposición**, un **lema** es proposición verdadera auxiliar utilizado en la demostración de un teorema, un **corolario** es una consecuencia directa de un teorema previamente demostrado.

Una **demostración** de la veracidad de una proposición es un argumento lógico que muestra de manera clara y convincente por qué un teorema es verdadero. Las demostraciones pueden involucrar razonamientos deductivos, reglas matemáticas, propiedades de los números y objetos matemáticos, entre otros elementos. Se compone de una secuencia de afirmaciones numeradas de $(1), (2), \ldots, (n)$, donde cada afirmación está respaldada por una o más razones que justifican su validez. Estas razones pueden incluir hipótesis, definiciones, afirmaciones previas en la misma demostración o proposiciones matemáticas ya demostradas. La última afirmación de la secuencia es la tesis que se busca demostrar.

1.5. Demostraciones

El objetivo de una demostración es proporcionar una justificación sólida y convincente de la veracidad de una afirmación matemática. Al demostrar una proposición, se establece una verdad matemática de forma rigurosa, lo que permite su aplicación en el desarrollo de nuevas teorías, la resolución de problemas y el avance del conocimiento matemático. Existen varios tipos de demostraciones en matemáticas, cada uno de los cuales se utiliza para abordar diferentes situaciones y problemas. Veremos algunos de los tipos más comunes utilizados en distintas áreas de la matemática.

1.5.1. Demostración directa

La **demostración directa** es el tipo de demostración más básico y común. Consiste en presentar una secuencia lógica de pasos y argumentos que llevan directamente desde las premisas hasta la conclusión deseada. Se utiliza cuando la relación entre las premisas y la conclusión es clara y se puede establecer de manera directa. Para llevar a cabo una demostración directa, se comienza con las premisas o supuestos iniciales y se aplican reglas lógicas y propiedades matemáticas para llegar a la conclusión deseada. Se evita el uso de suposiciones adicionales o técnicas más complejas, y se busca una argumentación clara y sencilla para demostrar la validez de la afirmación. Al examinar la tabla de verdad de la implicación lógica $P \Rightarrow Q$, podemos notar que para demostrar el teorema de la proposición $P \Rightarrow Q$, basta con mostrar que cuando P es verdadero, también lo es Q. Esto se debe a que la implicación $P \Rightarrow Q$ es verdadera cuando la premisa P es falsa, sin importar el valor de verdad de Q. Por lo tanto, en una demostración directa de $P \Rightarrow Q$, asumimos que la premisa P es verdadera y utilizamos argumentos lógicos para demostrar que la conclusión Q también es verdadera. En resumen, en una demostración directa de $P \Rightarrow Q$, nos enfocamos en establecer la validez de la relación entre la premisa y la conclusión, siguiendo el siguiente esquema lógico.

Esquema para una demostración directa

Proposición 1.5.1. *Si P, entonces Q.*

Demostración. Supongamos P,

$$\vdots$$

En consecuencias Q. $\square$

Los puntos suspensivos $\vdots$ indican la secuencia de razonamientos lógicos que inician con P verdadero y finaliza con Q verdadero. El inicio de la demostración se inicia con *Demostración* o a veces solo colocamos la abreviación **Dem.** y se finaliza con el símbolo $\square$ o también podemos finalizar con la expresión $Q.E.D$ que significa «Queda entonces demostrado». Como ejemplo, demostremos la siguiente proposición.

Proposición 1.5.2. *Si x es una solución de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ con $a \neq 0$, entonces*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dem.
Supongamos que x es una solución de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, es decir, satisface la ecuación.

Factorizamos a:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0.$$

Sumamos un cero dentro de los paréntesis como sigue $\left(\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=0\right)$:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=0.$$

Como $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, entonces

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=0.$$

Como $a \neq 0$, entonces $\frac{1}{a}a=1$, así;

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=\frac{1}{a}a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=\frac{1}{a}0=0.$$

Esto es,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0.$$

Despejamos el termino $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ para obtener: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Así, sacando raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación, obtenemos (sin olvidar el terminó $\pm$) lo siguiente:

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Esto implica que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Q.E.D

1.5.2. Demostración por contrapositiva

La demostración por contrapositiva (o contrarecírpoca) es un método utilizado para demostrar una afirmación condicional $P \Rightarrow Q$ usando su equivalencia lógica $\neg Q \Rightarrow \neg P$. En otras palabras, en una demostración por contrapositiva, se supone inicialmente la negación de la conclusión ($\neq Q$) de la afirmación condicional y luego se muestra que esto implica la negación de la premisa ($\neq P$). Si se puede demostrar que la negación de la premisa es verdadera, entonces se concluye que la afirmación condicional original es verdadera. En resumen, es probar la proposición $\neg Q \Rightarrow \neg P$ de manera directa. Una demostración por contrapositiva sigue el siguiente esquema:

Esquema para una demostración por contrapositiva

Proposición 1.5.3. *Si P, entonces Q.*

Demostración. (por contrapositiva) Supongamos $\neg Q$,

$\vdots$

En consecuencias $\neg P$. □

Como ejemplo, demostraremos una misma proposición usando los dos métodos vistos hasta ahora.

Proposición 1.5.4. *Si x es un número entero divisible por 6, entonces x es divisible por 2 y por 3.*

Dem. (Directa).
Supongamos que x un número entero divisible por 6. Esto es, $x = 6k$, donde k es un número entero. Como $6 = (2)(3)$, entonces

$$
\begin{aligned}
x &= 6k \\
x &= (2)(3)k \\
x &= 2(3k) = 3(2k)
\end{aligned}
$$

Dado que $3k$ y $2k$ son números entero, concluimos que x es divisible por 2 y por 3. Por lo tanto, la afirmación condicional es verdadera.

Q.E.D

Dem. (Por contrapositiva).
Supongamos que x es un número entero que no es divisible por 2 o no es divisible por 3. Si x no es divisible por 2, entonces no puede ser divisible por 6, ya que 6 es divisible por 2. De manera similar, si x no es divisible por 3, entonces tampoco puede ser divisible por 6, ya que 6 es divisible por 3. Por lo tanto, si un número no es divisible por 2 o no es divisible por 3, no puede ser divisible por 6. Concluimos que x no es divisible por 6, y por lo tanto, la afirmación condicional original también es verdadera.

Q.E.D

Es importante tener en mente que **no hay una «mejor»demostración en general**, ya que la elección del método de demostración depende del contexto, la naturaleza del problema y las premisas dadas. Tanto la demostración directa como la demostración por contrapositiva son métodos válidos y ampliamente utilizados en matemáticas.

En algunos casos, la demostración directa puede ser más simple y directa, especialmente si se tienen todas las premisas necesarias para llegar a la conclusión deseada. Es un enfoque lineal y fácil de seguir, lo que lo hace más intuitivo y comprensible.

Sin embargo, en otros casos, la demostración por contrapositiva puede ser más efectiva. Puede ser útil cuando no se dispone de información directa o cuando se quiere evitar un razonamiento más complejo. La demostración por contrapositiva puede proporcionar una alternativa más clara o más sencilla para demostrar la afirmación condicional. El siguiente ejemplo, muestra que es más facil probarlo por contrapositiva.

Proposición 1.5.5. *Si x^2 es par, entonces x es par.*

Dem.(Por contrapositiva).
Sea $P : x^2$ es par y $Q : x$ es par. Supongamos $\neg Q$, esto es, x es impar. Existe a entero tal que

$$x = 2a + 1.$$

Así,

$$x^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1.$$

Por tanto, x^2 es impar, es decir, $\neg P$ es verdadera.

Q.E.D

En última instancia, la «mejor»demostración dependerá de las circunstancias específicas y de los objetivos de la demostración. Lo más importante es elegir un enfoque que sea lógico, riguroso y que permita demostrar la veracidad de la afirmación de manera clara y convincente.

1.5.3. Demostración por contradicción

La demostración por contradicción es otro método comúnmente utilizado en matemáticas para demostrar una proposición o teorema. Consiste en suponer inicialmente la negación de la afirmación que se desea demostrar y luego derivar una contradicción lógica o matemática a partir de esa suposición. Si se llega a una contradicción, se concluye que la afirmación original es verdadera.

Supongamos que queremos demostrar que una proposición P es verdadera. Una **demostración por contradicción** comienza suponiendo que P es falsa, esto es, $\neg P$ es verdadera, y finaliza deduciendo que para una cierta proposición C, se cumple también $\neg C$, en otras palabras, es una contradicción $(C \wedge \neg C)$. Por lo que una demostración por contradicción sigue el siguiente esquema.

Esquema para una demostración por contradicción

Proposición 1.5.6. *P.*

Demostración. (por contradicción) Supongamos $\neg P$.

$$\vdots$$

En consecuencias $C \wedge \neg C$. □

En este método, no está especificado claramente qué representa la proposición C. Sin embargo, el proceso de demostración por contradicción comienza asumiendo que la negación de la proposición P, $\neg P$, es verdadera y mediante razonamiento lógico se obtienen nuevas proposiciones que eventualmente conducen a una proposición C y su negación, $\neg C$. Veamos un ejemplo de esto.

Proposición 1.5.7. *El número $\sqrt{2}$ es irracional.*

Dem. (Por contradicción).
Sea P : el número $\sqrt{2}$ es irracional. Supongamos $\neg P$, esto es, $\sqrt{2}$ no es irracional. Entonces $\sqrt{2}$ es racional, entonces existen enteros a y $b$con $b \neq 0$ tales que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}. \tag{1.1}$$

De hecho podemos suponer que la fracción $\frac{a}{b}$ está completamente simplificada. Esto es, a y b no tienen factores comunes. En particular, $2 \not| a$ y $2 \not| b$. Elevamos al cuadrado a ambos lados de la ecuación 1.1, obtenemos

$$2 = \frac{a^2}{b^2}. \tag{1.2}$$

esto es,

$$a^2 = 2b^2. \tag{1.3}$$

Esto implica que a^2 es par, entonces a es par (ver un ejemplo anterior). Como sabemos que a y b no son ambos pares, entonces b es impar, sea $C : b$ es impar, tenemos que C es verdadero. Ahora, existe r número entero tal que $a = 2r$, Así

$$4r^2 = 2b^2 \Rightarrow 2r^2 = b^2,$$

Esto es, b^2 es par, por lo que b es par, es decir, se cumple $\neg C$, En consecuencia $C \wedge \neg C$, es decir, una contradicción.

Q.E.D

Como mencionamos anteriormente, en muchas (casi todas) ocasiones nos encontramos con teoremas en forma de condicionales, es decir, de la forma $P \Rightarrow Q$. entonces ¿como se prueba por contradicción una condicional $P \Rightarrow Q$? Para responder esta cuestión, es importante recordar la equivalencia lógica antes mencionada $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$, por lo que $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$, así que el esquema de demostración por contradicción de $P \Rightarrow Q$ es la siguiente:

Esquema de demostración por contradicción de la proposición condicional

Proposición 1.5.8. *P.*

Demostración. (por cotradicción) Supongamos P y $\neg Q$.

$$\vdots$$

En consecuencias $C \wedge \neg C$. □

Como ejemplo, vamos a demostrar una proposición condicional que ya ha sido demostrada, pero esta vez utilizando el método de la contradicción.

Proposición 1.5.9. *Si x^2 es par, entonces x es par.*

Dem.(Por contradicción).
Sea $P : x^2$ es par y $Q : x$ es par. Supongamos P y $\neq Q$, es decir, que x^2 es par y que x no es par, es decir, x es impar. Entonces, existe a entero tal que

$$x = 2a + 1.$$

Así,

$$\begin{aligned} x^2 = (2a+1)^2 &= 4a^2 + 4a + 1 \\ &= 2(2a^2 + 2a) + 1 \\ &= 2k + 1 \qquad (k = 2a^2 + 2a). \end{aligned}$$

Esto es, x^2 es impar, es decir, $\neg P$ (aquí la proposición C es P). Por lo tanto, $P \wedge \neg P$ (contradicción).

Q.E.D

1.6. Demostración de bicondicionales

Sabemos que una proposición bicondicional P *si y solo si* Q es lógicamente equivalente a

(Si P, entonces Q) y (si Q, entonces P).

Por lo tanto, para demostrar una proposición de este estilo, debemos demostrar las dos proposiciones; $P \Rightarrow Q$ ((Si P, entonces Q) y $Q \Rightarrow P$ (si Q, entonces P). Así, la demostración de una bicondicional tiene el siguiente esquema:

Esquema de demostración de una proposición bicondicional

Proposición 1.6.1. $P \iff Q$.

Demostración. (No olvidar que $P \iff Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$)

Demostrar $P \Rightarrow Q$ (usando demostración directa, por contradicción, contrapositiva)

Demostrar $Q \Rightarrow Q$ (usando demostración directa, por contradicción, contrapositiva) □

1.7. Tipos de proposiciones

Podemos decir que hay tres tipos de proposiciones matemáticas:

1. **Proposiciones verdaderas (ya han sido probadas)**: Teoremas, lemas, corolarios y lo que llamamos de manera redundante proposiciones.

2. **Conjeturas:** Una conjetura es una afirmación o proposición que se cree que es verdadera, pero que aún no ha sido demostrada o verificada de manera rigurosa. En otras palabras, es una suposición o idea que se plantea como posible solución a un problema o como una afirmación que podría ser cierta, pero que aún requiere una demostración formal. Cabe mencionar que pueden resultar falsas.

3. **Proposiciones falsas.** Por ejemplo, «todos los números primos son impares»es falso, pues el 2 es par y es primo.

La última categoría nos lleva a la cuestión, ¿como probamos que una proposición es falsa? Para demostrar que una proposición es falsa, es necesario encontrar un contraejemplo, es decir, un caso en el cual la proposición no se cumpla. En otras palabras, se busca encontrar una situación, una configuración o un conjunto de valores que contradigan la afirmación que se está evaluando.

El proceso para demostrar que una proposición es falsa generalmente implica lo siguiente:

1. Entender la proposición: Comprender claramente cuál es la afirmación o proposición que se está evaluando. Es importante analizar todas las condiciones y suposiciones asociadas a la afirmación para tener una comprensión precisa de lo que se está afirmando.

2. Buscar un contraejemplo: Se procede a buscar un caso o una situación específica que contradiga la afirmación. Esto implica encontrar un conjunto de valores o condiciones que cumplan todas las condiciones de la proposición, pero que no satisfagan su conclusión. En otras palabras, se busca un caso que muestre que la proposición no se cumple en todos los casos posibles.

3. Presentar el contraejemplo: Una vez que se ha encontrado un contraejemplo, se debe presentar claramente y de manera precisa. Esto implica mostrar cómo los valores o las condiciones del contraejemplo contradicen la afirmación de la proposición. Es fundamental proporcionar una descripción detallada y explicar por qué el contraejemplo es válido y cómo refuta la proposición.

4. Concluir la falsedad de la proposición: Basándose en el contraejemplo presentado, se puede concluir que la proposición es falsa, ya que se ha encontrado al menos un caso en el cual no se cumple.

Es importante tener en cuenta que la existencia de un contraejemplo es suficiente para demostrar que una proposición es falsa. Sin embargo, si no se puede encontrar un contraejemplo, no se puede concluir que la proposición es necesariamente verdadera. En ese caso, la proposición puede requerir una prueba rigurosa o puede necesitar ser evaluada en un contexto más amplio.

En resumen, para demostrar que una proposición es falsa, se busca encontrar un contraejemplo que contradiga la afirmación. Esto implica encontrar un caso específico en el cual las condiciones de la proposición se cumplan, pero la conclusión no se satisfaga. Al presentar un contraejemplo válido, se puede concluir que la proposición es falsa.

Capítulo 2

Números reales

2.1. Axiomas de campo

Los números reales son un conjunto fundamental en las matemáticas que abarca una amplia gama de valores numéricos utilizados para medir, contar y representar cantidades. Son un concepto fundamental en casi todas las ramas de las matemáticas, desde la aritmética básica hasta el análisis matemático avanzado.

2.1.1. Axiomas de campo

Con la suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ conocido de los números reales, enunciaremos las reglas del juego que gobiernan en este conjunto, es decir, las propiedades axiomáticas de los números reales.

Axiomas para la suma:

Cerradura: Para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a + b \in \mathbb{R}.$$

Asociatividad: Para $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Existencia del neutro: Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$0 + a = 0 = a + 0.$$

Cerradura bajo inversos: Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe $-a \in \mathbb{R}$ tal que,

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a.$$

Conmutatividad: Para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a + b = b + a.$$

Axiomas para el producto:

Cerradura: Para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$ab \in \mathbb{R}.$$

Asociatividad: Para $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a(bc) = (ab)c.$$

Existencia del neutro: Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$1a = a = a1.$$

Cerradura bajo inversos: Para cada $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, existe $a^{-1} := \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ tal que,

$$a(a^{-1}) = 0 = (a^{-1})a.$$

Conmutatividad: Para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$ab = ba.$$

Axiomas de distributividad:

Distributividad por la izquierda: Para $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a(b + c) = ab + ac \in \mathbb{R}.$$

Distributividad por la derecha: Para $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$(a + b)c = ac + bc \in \mathbb{R}.$$

Los axiomas (las reglas del juego) mencionados previamente se cumplen en $\mathbb{R}$, pero no son exclusivos de ellos, más bien tiene que ver con el concepto de «campo»que no veremos aquí, pero no esta demás mencionarlo. Ahora, bien, también es importante recordar las relación de orden en los números reales:

Definición 2.1.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Denotaremos como $a \leq b$ cuando $b - a$ es un número real positivo o cero y diremos que a es menor o igual que b.*

Si queremos decir que b es más chico que a, entonces escribimos $b \leq a$ (o $a \geq b$), y queremos decir que no hay posibilidad que sean iguales, entonces, diremos que a es estrictamente menor a b si $a < b$ y $a \neq b$, similarmente, diremos que a es estrictamente mayor que b si $b < a$ (o $a > b$) y $a \neq b$. Propiedades de estas desigualdades:

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Si, $a \leq b$ $(a < b)$, entonces $a + c \leq b + c$ $(a + c < b + c)$.
- Si, $a \leq b$ $(a < b)$, entonces $a - c \leq b - c$ $(a - c < b - c)$.
- Si, $a \leq b$ $(a < b)$, entonces $\frac{1}{c}a \leq \frac{1}{c}b$ $(\frac{1}{c}a < \frac{1}{c}b)$ si $c \geq 0$.
- Si, $a \leq b$ $(a < b)$, entonces $\frac{1}{c}a \geq \frac{1}{c}b$ $(\frac{1}{c}a > \frac{1}{c}b)$ si $c < 0$.

Hay una propiedad de los números racionales sobre los reales y se llama **densidad** y básicamente lo que dices es que *entre cualquiera dos números reales existe un número racional.* Este resultado, tiene una gran importancia, pues entre esta esta que cualquier número irracional puede ser aproximado por una sucesión de racionales. El concepto de **sucesión** la veremos más adelante y solo será como mención.

Capítulo 3

Teoría básica de conjuntos y funciones

La teoría de conjuntos es una rama fundamental de las matemáticas que estudia las propiedades y relaciones de los conjuntos, que son colecciones bien definidas de objetos o elementos. La importancia de la teoría de conjuntos en las matemáticas se puede resumir en los siguientes puntos:

- *Fundamentos de la matemática*: La teoría de conjuntos proporciona los fundamentos y los cimientos sobre los cuales se construyen muchas otras ramas de las matemáticas. Es una base conceptual y un lenguaje común utilizado para formular y analizar diversas estructuras matemáticas, como números, funciones, relaciones, álgebra, geometría y cálculo.

- *Análisis de estructuras matemáticas*: La teoría de conjuntos permite analizar y describir las propiedades y estructuras de otros objetos matemáticos. Por ejemplo, se utiliza para estudiar las propiedades de los números, las relaciones entre conjuntos, las operaciones matemáticas y las propiedades de las funciones.

- *Razonamiento lógico y demostraciones*: La teoría de conjuntos proporciona un marco riguroso para el razonamiento lógico y la construcción de demostraciones matemáticas. Utilizando la notación y las reglas de la teoría de conjuntos, se pueden formular y probar teoremas matemáticos de manera precisa y coherente.

- *Desarrollo de otras ramas de las matemáticas*: La teoría de conjuntos ha influido en el desarrollo de otras ramas de las matemáticas. Por ejemplo, la teoría de conjuntos es esencial para la topología, el análisis matemático, la teoría de grafos, la lógica matemática y la teoría de la computación. Estas ramas utilizan los conceptos y las técnicas de la teoría de conjuntos para estudiar y resolver problemas en sus respectivos campos.

- *Aplicaciones en informática y ciencias*: La teoría de conjuntos tiene aplicaciones en diversas áreas, como la informática, la teoría de la computación y las ciencias en general. Los conjuntos se utilizan para representar datos, modelar problemas y diseñar algoritmos. Además, la teoría de conjuntos es fundamental en el estudio de la probabilidad y la estadística, donde se utilizan conjuntos para representar eventos y muestras.

Por lo tanto, la teoría de conjuntos es esencial en las matemáticas porque proporciona los fundamentos para el razonamiento lógico, el análisis de estructuras matemáticas y el desarrollo de otras ramas de las matemáticas. Además, tiene aplicaciones en informática y ciencias, lo que la hace relevante en diversos campos de estudio.

3.1. Conjuntos

Si bien existe una definición axiomática de conjunto, nosotros no profundizaremos en ello, simplemente se tratará de manera intuitiva. Es importante recordar que las operaciones $\wedge$ y $\vee$ son operadores lógicos que denotan a «y»y «o»respectivamente, en esta sección usaremos las dos últimas, pero teniendo siempre en cuenta lo mencionado y más aún las propiedades que cumplen, como **asociatividad, conmutatividad y distributivas**, pues las usaremos en demostraciones.

Definición 3.1.1 (Intuitiva)**.** *Un* ***conjunto*** *es una colección de objetos.*

Por ejemplo, una colección de libros, de animales o de números. Se usarán las letras mayúsculas del alfabeto $A, B, C, ...$ para los conjuntos y las minúsculas $a, b, \dots$ para los elementos. Para especificar los elementos de un conjunto se usarán llaves, por ejemplo

$$A = \{a, b, c\}.$$

Notación: $x \in A$ se lee; x pertenece al conjunto A, y $x \notin A$ significa que x no pertenece al conjunto A Algunos conjuntos importantes son;

- El conjunto de los números naturales: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ó $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- El conjunto de los números enteros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- El conjunto de los números racionales: $\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$.
- El conjunto de los números irracionales: Son los que no son racionales y su conjunto se denota como $\mathbb{I}$.
- El conjunto de los números reales son la unión de todos lo anteriores y se denota$\mathbb{R}$.

■ **Ejemplos 3.1.2.** 1) *Sea el conjunto* $A = \{1, 3, 5, 7\}$*. Se tiene que* $5 \in A$ *y* $6 \notin A$*.*

2) *Sea* $A = \{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$*. En este caso* $169 \in A$*, pero* $50 \notin A$*.*

3) *El conjunto de las letras de la palabra México es* $\{M, é, x, i, c, o\}$*.*

Otros ejemplos importantes son los números reales, que son los puntos de la recta, este conjunto se denota por $\mathbb{R}$; por otro lado el plano cartesiano

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

, así como los puntos sobre la recta la recta $y = 3x + 3$.

El símbolo $\emptyset$ se usará para describir el conjunto que no tiene elementos; es este conjunto se le llama conjunto vacío. Es conveniente usar condiciones para describir conjuntos (comprensión):

■ **Ejemplos 3.1.3.**
- $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} : n \textit{ es par}\}$
- $\{0, 1, 4, 9, 25, 36, \dots, m^2, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} : n = m^2, n \in \mathbb{N} \textit{ es par}\}$

3.2. Subconjuntos

Definición 3.2.1. *Sean* A *y* B *conjuntos, se dice que* B *es subconjunto de* A*, si cada elemento de* B *lo es también de* A*, se denota* $B \subseteq A$*, en caso contrario se escribirá* $B \nsubseteq A$*.*

Obsérvese que si $B \subseteq A$, se tiene $x \in B \Rightarrow x \in A$, y viceversa, si para todo $x \in B$ se tiene $x \in A$, entonces $B \subseteq A$. En general, cuando la proposición P se cumple si y sólo si se cumple la proposición Q, escribiremos $P \iff Q$.

Bajo esta notación, la observación anterior se puede reescribir así

$$B \subseteq A \iff (x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Si $B \subseteq A$, se puede escribir también $A \supseteq B$, y se dirá que B está contenido en A, o que A contiene a B. También, usamos el símbolo $\subset$ o $\subsetneq$ para excluir la posibilidad de que $A = B$.

■ **Ejemplos 3.2.2.** *Ilustremos este concepto con los siguentes ejemplos:*

1. *Si* $A = \{x : x \text{ es una golondrina}\}$, $B = \{x : x \text{ es una ave}\}$ *y* $C = \{x : x \text{ es un reptil }\}$, *entonces* $A \subseteq B$, *pero* $B \nsubseteq C$.
2. *Si* $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 7\}$, $B = \{2, 3, 7\}$ *y* $C = \{2, 3, 8\}$, *entonces* $B \subseteq A$, *pero* $B \nsubseteq C$.
3. *El conjunto vació* $\emptyset$ *es subconjunto de cualquier conjunto (por vacuidad o simplemente por convención).*

3.3. Operaciones con conjuntos

Al comparar dos conjuntos es conveniente pensar que ambos son subconjuntos de un mismo conjunto fijo, llamado **conjunto universal**.

Definición 3.3.1. *La unión de dos conjuntos* A *y* B *se define como el conjunto:*

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

En palabras simples, la unión de dos o más conjuntos consiste en todos los elementos presentes en dichos conjuntos, sin duplicados.

■ **Ejemplo 3.3.2.** *Consideremos dos conjuntos:* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{3, 4, 5\}$. *La unión es* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Las propiedades siguientes son consecuencia inmediata de la definición.

u_1) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$,

u_2) $A \cup B = B \cup A$ (conmutatividad)

u_2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociatividad).

En virtud de la última observación, *iii*), al denotar la unión de más de dos conjuntos, no es necesario escribir los paréntesis.

Definición 3.3.3. *La intersección de dos conjuntos* A *y* B *se define como el conjunto:*

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Como consecuencia inmediata tenemos que

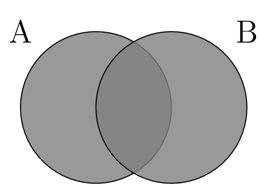
i_1) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$,

i_2) $A \cap B = B \cap A$ (conmutatividad)

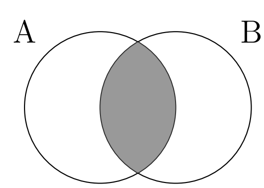
i_3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociatividad).

En analogía a la unión, el inciso i_3) nos dice que la intersección de más de dos conjuntos, no es necesario escribir los paréntesis.

A continuación mostramos en diagramas de venn la unión e intersección de dos conjuntos A y B.



$A \cup B$



$A \cap B$

Proposición 3.3.4 (Ley distributiva)**.** *Sean A, B y C conjuntos, entonces se cumple*

d_1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

d_2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Dem.
Sean A, B y C conjuntos.

Veamos que d_1 se cumple:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ y } x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \text{ y } (x \in B \text{ o } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ y } x \in C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Para d_2:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \text{ o } x \in B \cap C \\ &\iff x \in A \text{ o } (x \in B \text{ y } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ y } (x \in A \text{ o } x \in C) \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Q.E.D

Otra manera de demostrar igualdad de conjuntos y la más usada es probando por contenciones, es decir, mostrar que el primer conjunto esta contenido en el otro y viceversa.

Podemos definir un **conjunto universal** como un conjunto predefinido que engloba a todos los conjuntos bajo discusión. En otras palabras, todos los conjuntos considerados son subconjuntos de este conjunto fijo y más amplio. Por ejemplo, al trazar gráficos en el plano cartesiano $\left(\mathbb{R}^2\right)$, dicho plano actúa como el conjunto universal, y todo lo que se encuentra dentro de él son subconjuntos. Por lo tanto, las rectas, parábolas, círculos, y otros objetos geométricos son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

Definición 3.3.5. *Sea $\mathbb{U}$ un conjunto universal y $A \subseteq \mathbb{U}$. El **conjunto complemento** o simplemente **complemento** de A en $\mathbb{U}$ es el conjunto de elementos de $\mathbb{U}$ que no pertenencen a A, y lo denotamos por A^c, específicamente*

$$A^c = \{x \in \mathbb{U} : x \notin A\}.$$

Como primera observación tenemos que el complemento de un conjunto varía si el universal donde vive cambia, por ejemplo, el complemento de $A = 1, 2$ en $\mathbb{U}_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ es $\{-2, -1, 0\}$, pero en $\mathbb{U}_2 = \mathbb{N}$ es $\{3, 4, 5, \dots\}$.

Proposición 3.3.6. *Sea $\mathbb{U}$ un conjunto universal y $A, B \subseteq \mathbb{U}$. Las siguientes propiedades se cumplen:*

1) $(A^c)^c = A$,

2) $A \cup A^c = \mathbb{U}$,

3) $A \cap A^c = \emptyset$,

4) $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$.

Dem.
Sean $A, B \subseteq \mathbb{U}$.

1) Tenemos:

$$\begin{aligned} x \in (A^c)^c &\iff x \in \mathbb{U} \text{ y } x \notin A^c \\ &\iff x \in \mathbb{U} \text{ y } (x \in \mathbb{U} \text{ y } x \in A) \\ &\iff x \in \mathbb{U} \text{ y } x \in A \\ &\iff x \in A. \end{aligned}$$

por lo tanto, $(A^c)^c = A$.

2) Dado que $A, A^c \subseteq \mathbb{U}$, entonces $A \cup A^c \subseteq \mathbb{U}$.Por otro lado, si $x \in \mathbb{U}$, entonces si $x \notin A$ se tiene que $x \in A^x$ (por definición), por lo tanto, $\mathbb{U} = A \cup A^c$.

3) Veamos que $A \cap A^c = \emptyset$. Si $A \cap A^c \neq \emptyset$, entonces existe $x \in A \cap A^c$, es decir, $x \in A$ y $x \in A^c$, esto es, $x \in A$ y $x \notin A$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A \cap A^c = \emptyset$.

4) Supongamos que $A \subseteq B$ y sea $x \in B^c$, entonces $x \notin B$, en particular, $x \notin A$, pues por hipótesis $A \subseteq B$ (pues si x estuviera en A, entonces estaría en B por definición de contención lo cual no es posible por hipótesis). Por lo tanto, $x \in A^c$.

   Supongamos que $B^c \subseteq A^c$. Por lo anterior, $A = (A^c)^c \subseteq (B^c)^c = B$.

Q.E.D

Proposición 3.3.7 (leyes de De morgan)**.** *Sean $A, B, \mathbb{U}$ conjuntos tal que $A, B \subseteq \mathbb{U}$, entonces*

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

(a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Dem.
Sean $A, B \subseteq \mathbb{U}$.

(a) Tenemos:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \iff x \notin A \text{ y } x \notin B \\ &\iff x \in A^c \text{ y } x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(b) Tenemos:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\iff x \notin A \cap B \iff x \notin A \text{ o } x \notin B \\ &\iff x \in A^c \text{ o } x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Q.E.D

Definición 3.3.8. ***La diferencia*** *entre dos conjuntos A y B se define como sigue:*

$$A - B := \{x : x \in A \text{ } y \text{ } x \notin B\}$$

También se usa la notación $A \setminus B$ para la diferencia de conjuntos.

Proposición 3.3.9. *Sean A, B y C conjuntos. Se cumple;*

$$A - B \cap C = (A - B) \cup (A - C)$$

Dem.
Sean A, B y C conjuntos.

$$\begin{aligned} x \in A - (B \cap C) &\iff x \in A \text{ y } (x \notin B \cap C) \iff x \in A \text{ y } (x \notin B \text{ o } x \notin C) \\ &\iff (x \in A \text{ y } x \notin B) \text{ o } (x \in A \text{ y } x \notin C) \\ &\iff (x \in A \text{ y } x \notin B) \text{ o } (x \in A \text{ y } x \notin C) \\ &\iff x \in A - B \text{ o } x \in A - C \iff x \in (A - B) \cup (A - C). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A - B := \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$

Q.E.D

Si operamos con conjuntos en relación a un conjunto universal, la demostración de la proposición previo se vuelve más sencilla e incluso es posible obtener una equivalencia en la definición de la diferencia entre conjuntos.

Proposición 3.3.10. *Sean $A, B, C\mathbb{U}$ conjuntos tales que $A, B, C \subseteq \mathbb{U}$. Se cumplen las siguientes:*

(1) $A - B = A \cap B^c$,

(2) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Dem.
Para (1) tenemos:

$$x \in A - B \iff x \in A \text{ y } x \notin B \iff x \in A \text{ y } x \in B^c \iff x \in A \cap B^c.$$

Por lo tanto, $x \in A \cap B^c$. Para dos, consideraremos el inciso (1) ya demostrado, también las leyes de De Morgan y propiedades distributivas.

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= A \cap (B \cap C)^c = A \cap (B^c \cup C^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \\ &= (A - B) \cup (A - C). \end{aligned}$$

Q.E.D

Se puede hacer demostraciones usando las propiedades anteriores, pero eso ya se deja a la imaginación del lector.

Finalmente, hablemos de un conjunto importante que colecciona todos los subconjuntos de un conjunto dado.

Definición 3.3.11. *Dado un conjunto A. El* ***conjunto potencia*** *de A, se denota y describe como;*

$$\mathcal{P}(A) := \{S : S \subseteq A\}.$$

■ **Ejemplo 3.3.12.** *si $A = \{1, 2\}$, entonces el conjunto potencia de A, $\mathcal{P}(A)$, sería:*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

El conjunto potencia de A incluye el conjunto vacío $\emptyset$, los conjuntos

3.4. Producto cartesiano

El producto cartesiano es uno de los conceptos importantes de la matemática, pues de este emanan conceptos como relación y función. Para tratarlo, es necesario el concepto de *par ordenado*.

Definición 3.4.1. *Un* ***par ordenado*** *de una pareja de objetos matemáticos «a», «b»es el conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ y lo denotamos como (a, b).*

En otras palabras, un par ordenado (a, b) hace la distinción de orden secuencial entre «a»y «b». Obsérvese que $(a, b) \neq (b, a)$, pues $\{\{a\}, \{a, b\}\} \neq \{\{b\}, \{b, a\}\}$ (siempre que $a \neq b$).

Proposición 3.4.2. *Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y solo $a = c$ y $b = d$.*

Dem.
Dividiremos nuestra demostración en dos $\Rightarrow$) y $\Leftarrow$):

$\Rightarrow$) Supongamos que $(a, b) = (c, d)$. Entonces $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, Así,

$$\{a\} = \bigcap\{\{a\}, \{a, b\}\} = \bigcap\{\{c\}, \{c, d\}\} = \{c\},$$

por lo que $a = c$. Por la misma igualdad inicial; $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ se sigue que

$$\{\{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\} - \{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} - \{\{c\}\} = \{\{c, d\}\}$$

Se tiene que $\{a, b\} = \{c, d\}$.Hay dos casos;

- $|\{a, b\}| = |\{c, d\}| = 1$, en este caso $a = b$ y $c = d$ y por transitividad se concluye que $b = d$.
- $|\{a, b\}| = |\{c, d\}| = 2$, en este caso, obtenemos

$$\{b\} = \{a, b\} - \{a\} = \{c, d\} - \{c\} = \{d\}$$

Por tanto, $b = d$. Se concluye que $(a, b) = (c, d)$.

$\Leftarrow$) Si $a = c$ y $b = d$, entonces $\{a\} = \{c\}$ y $\{a, b\} = \{c, d\}$, por lo que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Por lo tanto, $(a, b) = (c, d)$.

Q.E.D

Definición 3.4.3. *Sean A y B conjuntos,* ***el producto cartesiano*** *de A y B es el conjunto denotado por $A \times B$ y consta de los pares ordenado (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$, es decir,*

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

■ **Ejemplos 3.4.4.** *Ilustremos el producto cartesiano con los siguientes ejemplos:*

- *Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b\}$, entonces el producto cartesiano $A \times B$ sería:*

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

- *Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{x, y, z\}$. El producto cartesiano $A \times B$ es:*

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}$$

- *Si $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{N}$, entonces el producto $A \times B$ es $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y se describe como sigue:*

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

- *Si consideramos los conjuntos A y B como los conjuntos de números reales $\mathbb{R}$, el producto cartesiano $A \times B$ se representa como $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y que conocemos como* ***plano cartesiano*** *y es descrito como:*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

3.5. Relaciones

Definición 3.5.1. *Sean A y B conjuntos. Una relación R entre A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, es decir, $R \subseteq A \times B$.*

■ **Ejemplo 3.5.2.** *consideremos los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{x, y\}$, su producto cartesiano es;*

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}.$$

Veamos todos las relaciones entre A y B. Qué por definición es cualquier subconjunto de $A \times B$:

$$\begin{array}{ll}
R_1 = \emptyset & R_9 = \{(1,y),(2,x)\} \\
R_2 = \{(1,x)\} & R_{10} = \{(1,y),(2,y)\} \\
R_3 = \{(1,y)\} & R_{11} = \{(2,x),(2,y)\} \\
R_4 = \{(2,x)\} & R_{12} = \{(1,x),(1,y),(2,x)\} \\
R_5 = \{(2,y)\} & R_{13} = \{(1,x),(1,y),(2,y)\} \\
R_6 = \{(1,x),(1,y)\} & R_{14} = \{(1,x),(2,x),(2,y)\} \\
R_7 = \{(1,x),(2,x)\} & R_{15} = \{(1,y),(2,x),(2,y)\} \\
R_8 = \{(1,x),(2,y)\} & R_{16} = \{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y)\}
\end{array}$$

Hemos dicho e ilustrado que una relación entre dos conjuntos A y B es cualquier subconjunto de $A \times B$, entonces el conjunto potencia de $A \times B$ colecciona todas las relaciones entre A y B. Al subconjunto $\emptyset$ se llama **relación vacía**. En general, para una relación $R \subseteq A \times B$ se usa la la nomenclatura aRb, para indicar que $(a,b) \in R$.

Definición 3.5.3. *El dominio de una relación $R \subseteq A \times B$ se define como:*

$$D(R) := \{a \in A : \text{ existe } b \in B \text{ tal que } (a,b) \in R\}.$$

■ **Ejemplo 3.5.4.** *Veamos el dominio de cada relación del ejemplo 3.5.2.*

$$\begin{array}{ll}
D(R_1) = \emptyset & D(R_9) = \{1,2\} \\
D(R_2) = \{1\} & D(R_{10}) = \{1,2\} \\
D(R_3) = \{1\} & D(R_{11}) = \{2\} \\
D(R_4) = \{2\} & D(R_{12}) = \{1,2\} \\
D(R_5) = \{2\} & D(R_{13}) = \{1,2\} \\
D(R_6) = \{1\} & D(R_{14}) = \{1,2\} \\
D(R_7) = \{1,2\} & D(R_{15}) = \{1,2\} \\
D(R_8) = \{1,2\} & D(R_{16}) = \{1,2\}
\end{array}$$

Definición 3.5.5. *La imagen de una relación $R \subseteq A \times B$ se define como:*

$$Im(R) := \{b \in B : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } (a,b) \in R\}.$$

■ **Ejemplo 3.5.6.** *Veamos el dominio de cada relación del ejemplo 3.5.2.*

$$\begin{array}{ll}
Im(R_1) = \emptyset & Im(R_9) = \{x,y\} \\
Im(R_2) = \{x\} & Im(R_{10}) = \{y\} \\
Im(R_3) = \{y\} & Im(R_{11}) = \{x,y\} \\
Im(R_4) = \{x\} & Im(R_{12}) = \{x,y\} \\
Im(R_5) = \{y\} & Im(R_{13}) = \{x,y\} \\
Im(R_6) = \{x,y\} & Im(R_{14}) = \{x,y\} \\
Im(R_7) = \{x\} & Im(R_{15}) = \{x,y\} \\
Im(R_8) = \{x,y\} & Im(R_{16}) = \{x,y\}
\end{array}$$

El **codominio** de $R \subseteq A \times B$ es B. Obsérvese que en general $Im(R) \subseteq B$.

3.6. Funciones

Las funciones son una subclase de las relaciones. Es un caso especial y que podríamos decir que es de los objetos que más usamos en ciencias básicas e ingeniería.

Definición 3.6.1. *Sean A y B conjuntos y $R \subseteq A \times B$. R es una* ***función*** *si cumple:*

(1) *$D(R) = A$,*

(2) *Si $(a, y_1), (a, y_2) \in R$, entonces $y_1 = y_2$.*

La primera condición de la definición 3.6.1 nos dice que

$$\forall x \in A, \exists y \in B \ni (x, y) \in R.$$

Para darle lectura a esto, es necesario saber el significado de cada símbolo; $\forall$ significa «**para todo**», $\exists$ significa «**existe**»y $\ni$ significa «**tal que**». Por lo que, el enunciado matemático previo se lee: «Para todo x en A, existe y en B tal que (x, y) es elemento de R». En otras palabras, cada elemento de A debe estar emparejado con algún elemento de B. La segunda condición no dice este emparejamiento debe ser único, es decir, que cada elemento de A esta emparejado con un único elemento de B. De modo que en una función R, si $(a, b) \in R$, entonces b queda totalmente determinado por a y por ello en lugar de de b colocamos $R(a)$ y se suele llamar **la imagen de «a»bajo** R, y también conocemos esta asociación como **Regla de correspondencia**. Por lo general, denotamos una función partiendo de la letra f que es la inicial de función. Ahora, por todo lo mencionado es común denotar la pareja $a \mapsto f(a)$, para indicar la pareja $(a, f(a))$, y aunando a ello, es conveniente usar la notación $f : A \longrightarrow B$ (a veces se usa $A \xrightarrow{f} B$)para denotar la función f, que nos indica que cada elemento de A esta asociado a un elemento de B. El dominio y codominio de f son exactamente el dominio y codominio como relación.

■ **Ejemplos 3.6.2.** *Ilustremos el concepto de función con los siguientes ejemplos:*

- *Retomando el ejemplo 3.5.2 con $A = \{1, 2\}$, y $B = \{x, y\}$. Considerando el ejemplo 3.5.6 y el primer inciso de la definición de función, se sigue que los únicos candidatos a función son $R_7, R_8, R_9.R_{10}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}$. Y por el inciso 2 vemos que R_7, R_8, R_9, R_{10} son funciones, pero $R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}$ no lo son, pues por ejemplo R_{12} tiene como elementos a $(1, x)$ y $(1, y)$, pero x se supone distinto de y, por lo que no cumple la segunda condición para ser función, el resto tienen elementos similares.*
- *Para A es un conjunto no vació. La relación $\mathrm{id}_A : A \longrightarrow A$ con regla de correspondencia dada por $\mathrm{id}_A(x) = x$, es una función y es llamada* ***función identidad****.*

Si bien una función es una relación y una relación es un subconjunto de un producto cartesiano, entonces la igualdad de funciones se reduce a la igualdad de conjuntos. Sin embargo, puede haber métodos más prácticos o manejables para determinar si una función es igual a otra.

Proposición 3.6.3. *Sean A, B, C, D conjuntos y $f \subseteq A \times B$, $g \subseteq C \times D$ funciones. Entonces, $f = g$ si y solo si*

(a) *$A = C$,*

(b) *$B = D$ (este es más por la arbitrariedad de la imagen de una función),*

(c) *$f(a) = g(x)$, $\forall x \in A$.*

Dem.
Dividiremos nuestra demostración en dos $\Rightarrow$) y $\Leftarrow$):

$\Leftarrow$) Supongamos que se cumplen:

(a) $A = C$,

(b) $B = D$,

(*c*) $f(a) = g(x)$, $\forall x \in A$.

Si $(x, f(x)) \in f$, entonces como $x \in A = C$ y $f(x) = g(x)$, se sigue que $(x, f(x)) \in g$, es decir, $f \subseteq g$. Probar que $g \subseteq f$ es totalmente análogo, por lo tanto, $f = g$.

$\Rightarrow$) Supongamos que $f = g$, entonces $A = D(f) = D(g) = C$ y $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$. Además, $\text{Im}(f) \subseteq B$ y $\text{Im}(g) \subseteq D$ y considerando el hecho de que dichas imágenes pueden cubrir totalmente el codominio, es natural exigir que $B = D$, finalmente veamos que se cumple (*c*): sea $x \in A = C$,entonces $(x, g(x)) \in g$ y $(x, f(x)) \in f$, pero como $f = g$, se sigue que $(x, g(x)), (x, f(x)) \in f$, y por ser f función, se concluye que $f(x) = g(x)$.

Q.E.D

La proposición previa 3.6.3 nos permite reformular el concepto de función como: Una función f consta de un conjunto A llamados dominio, un conjunto B llamado codominio y una regla de correspondencia $f : A \longrightarrow B$ que a cada elemento del conjunto A le asocia uno y sólo un elemento de B.

Recordemos que si $f \subseteq A \times B$ es una función, entonces

$$\text{Im}(f) = \{b \in B : \text{ existe } a \in A, \text{ tal que } (a, b) \in f\}$$

pero como f es función, entonces $b = f(a)$, por lo tanto, podemos reescribir este concepto como sigue:

$$\text{Im}(f) = \{b \in B : \text{ existe } a \in A, \text{ tal que } f(a) = b\}$$

.

3.7. Composición de funciones

Si el codominio de una relación coincide con el dominio de otra relación entonces se puede construir una nueva relación

Definición 3.7.1. *Sean A, B, C conjuntos, $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$. La relación R* ***compuesta con (o seguida de)*** *S es la relación denotada y definida como sigue:*

$$S \circ R; = \{(a, c) : \text{ existe } b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S\}.$$

Observe que el orden es muy importante. Esa es la definición general para una relación, pero en el caso especial de función, queda como sigue (una vez simplificando lo que se requiera simplificar como: la notación, etc.):

Definición 3.7.2 (Composición de funciones)**.** *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones. La función f* ***compuesta con (o seguida de)*** *g es la función con dominio A, codominio C y regla de correspondencia*

$$x \mapsto= g(f(x)), \ \textbf{\textit{para todo}} \ x \in A.$$

Y es denotado por $g \circ f$, es decir, $g \circ f : A \longrightarrow C$ dado por $g \circ f(x) = g(f(x))$.

■ **Ejemplos 3.7.3.** *Veamos los siguientes casos:*

- *Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^3 + 1$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $g(x) = x + 1$, entonces las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ están dadas por:*
  - $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^3 + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$
  - $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^3 + 1) = (x^3 + 1) + 1 = x^3 + 2$

  Este ejemplo muestras que la composición no es «conmutativa».

- *Si A y B son dos conjuntos y $f : A \longrightarrow B$ una función, entonces*

$$f \circ \mathrm{id}_A = f \text{ y } \mathrm{id}_B \circ g = g$$

Proposición 3.7.4. *Sean $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$ funciones, entonces*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Es decir, la composición es asociativa, por lo que podemos hacer caso omiso a los paréntesis.

Dem.
Ambas composiciones tienen el mismo codominio A y codominio D, por lo que para probar la igualdad basta con verificar la regla de correspondencia, por ello, sea $x \in A$.

$$h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h\left[g(f(x))\right]$$

Y

$$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h\left[g(f(x))\right].$$

Esto prueba lo deseado.

Q.E.D

Definición 3.7.5. *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función.*

- *Si existe una función $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$, entonces a g se le llama inversa izquierda de f.*
- *Si existe una función $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$, entonces a g se le llama inversa derecha de f.*

Para dar un ejemplo usaré las siguientes funciones:

Definición 3.7.6. *En $\mathbb{Z}$.*

- ***La función techo** esta definida como $\lceil\ \rceil : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ y dado por $\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$*
- ***La función piso** esta definida como $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ y dado por $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$*
- ***La función entero** esta definida como $[\ ] : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ y dado por*

$$[x] = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & si\ x \geq 0 \\ \lceil x \rceil & si\ x < 0 \end{cases}$$

■ **Ejemplo 3.7.7.** *Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(z) = 2z$ y $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $g(z) = [\frac{z}{2}]$, veamos quienes son $f \circ g$ y $g \circ f$:*

$$f \circ g(z) = f\left(\left[\frac{z}{2}\right]\right) = 2\left[\frac{z}{2}\right].$$

Si $z = 3$, entonces $\frac{3}{2} = 1.5$ y $[1.5] = 1$, por lo que $f \circ g(3) = 2$. Es decir, f no es inversa izquierda de g y g no es inversa derecha de f. Sin embargo,

$$g \circ f(z) = g(2z) = \left[\frac{2z}{2}\right] = [z] = z = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}(z).$$

Por lo que, f es inversa izquierda de g y g es inversa derecha de f.

Cabe resaltar que este ejemplo 3.7.7 muestra que es posible tener inversas izquierdas o derechas sin que necesariamente sean ambas al mismo tiempo.

Definición 3.7.8. *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Cuando existe $g : B \longrightarrow A$ función tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ y $g \circ f = \mathrm{id}_A$, decimos que f es invertible y que g es su inversa.*

■ **Ejemplo 3.7.9.** *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{1}{2x}$. Es facil, mostrar que se cumple lo deseado.*

Teorema 3.7.10. *Sea $f : A \longrightarrow B$ Una función. Si $g_1, g_2 : B \longrightarrow A$ funciones tal que g_1 es inversa izquierda y g_2 es inversa derecha de f, entonces $g_1 = g_2$, es decir, f es invertible.*

Dem.
Por definición de inversa izquierda y derecha, tenemos que: $g_1 \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g_2 = \mathrm{id}_B$. Así,

$$g_1 = g_1 \circ \mathrm{id}_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathrm{id}_A \circ g_2 = g_2.$$

Por lo tanto, f es invertible.

Q.E.D

Corolario 3.7.11. *Si $f : A \longrightarrow B$ es invertible, entonces su inverso $g : B \longrightarrow A$ es único.*

3.8. Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

Definición 3.8.1. *Una función $f : A \Longrightarrow B$ se llama* ***inyectiva*** *si para todo $x_1, x_2 \in A$, tales que $x_1 \neq x_2$, se tiene $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

■ **Ejemplos 3.8.2.** *Veamos unos ejemplos:*

- $\mathbb{R} \ni x \xmapsto{f} f(x) = x + 1 \in \mathbb{R}$, *es inyectiva.*
- $\mathbb{Z} \ni x \xmapsto{g} g(z) = 3z \in \mathbb{Z}$, *es inyectiva.*
- $\mathbb{R} \ni x \xmapsto{h} h(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ *NO es inyectiva, pues $f(1) = 1 = f(-1)$ y $1 \neq -1$.*

Tomamos las proposiciones $P : x_1, x_2 \in A$, con $x_1 \neq x_2$ y $Q : f(x_1) \neq f(x_2)$, entonces probar que f es inyectiva, es mostrar que $P \Rightarrow Q$, o similarmente $\neg Q \Rightarrow \neg P$, es decir, Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$, cualquiera de estas se puede usar para probar lo deseado, sin embargo, la última es la más usada.

■ **Ejemplo 3.8.3.** *Veamos que $f : \mathbb{R} \longleftarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 3$ es inyectiva. Supongamos que $f(x) = f(y)$, es decir, $2x + 3 = 2y + 3$, así*

$$2x + 3 - 3 = 2y + 3 - 3 \Rightarrow \frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(2y) \Rightarrow x = y.$$

Definición 3.8.4. *Una función $f : A \longrightarrow B$ se llama* ***sobreyectiva (o sobre)*** *si para todo $y \in B$, existe $x \in A$, tal que $f(x) = y$.*

■ **Ejemplo 3.8.5.** *Retomando los ejemplos 3.8.2 tenemos:*

- *f es sobre, pues para $y \in \mathbb{R}$ arbitrario, $f(y - 1) = (y - 1) + 1 = y$.*
- *g no es sobre, pues $1 \in \mathbb{Z}$, pero no existe entero z tal que $3z = 1$.*
- *g no es sobre, pues no existe real x tal que $x^2 = -1$.*

Definición 3.8.6. *Una función $f : A \longrightarrow B$ se llama **biyectiva** si es inyectiva y sobre.*

Por lo que en nuestros ejemplos 3.8.2 se tiene que f es biyectiva.

Teorema 3.8.7. *Una función $f : A \longrightarrow B$ es biyectivas si y sólo si es invertible.*

Dem.
Si f es biyectiva, se define $g : B \longleftrightarrow A$ de la manera obvia: para cada $b \in B$ por sobreyectividad existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$ y por inyectividad a es único, así, se define $g(b) = a$. Entonces,

$$f \circ g(b) = f(g(b)) = f(a) = b \text{ y } g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = a.$$

Es decir, $f \circ g = \mathrm{id}_B$ y $g \circ f = \mathrm{id}_A$, por lo tanto, f es invertible. Ahora, mostremos la veracidad del reciproco, supongamos que f es invertible, entonces existe $g : B \longleftarrow A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ y $g \circ f = \mathrm{id}_A$, veamos que f es inyectiva y sobre:

- Supongamos que $f(a_1) = f(a_2)$, entonces $a_1 = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = a_2$, es decir, f es inyectiva.
- Sea $b \in B$. Tomamos $a = g(b)$, se sigue que $f(a) = f(g(b)) = b$, Es decir, f es sobre.

Por lo tanto, f es biyectiva.

Q.E.D

Proposición 3.8.8. *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones.*

(1) *Si f, g son inyectivas, entonces $g \circ f : A \longrightarrow C$ es inyectiva.*

(2) *Si f, g son sobre, entonces $g \circ f : A \longrightarrow C$ es sobre.*

Dem.
Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones.

(1) Supongamos que f, g son inyectivas y sean $a_1, a_2 \in A$ tal que $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$, entonces $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Por inyectividad de g, tenemos que $f(a_1) = f(a_2)$ y por los la inyectividad de f se sigue que $a_1 = a_2$. Por lo tanto, $g \circ f$ es inyectiva.

(2) Supongamos que f, g son sobres y sea $c \in C$. Dado que g es sobre, se sigue que existe $b \in B$ tal que $g(b) = C$ y por ser f sobre, se sigue que existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Así, $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Por lo tanto, $g \circ f$ es sobre.

Q.E.D

3.9. Principio de Inducción Matemática

Terminamos estas notas con hablando del método de demostración conocido como **Inducción matemática**. La inducción matemática es un método que se utiliza para demostrar que una afirmación o propiedad es verdadera para todos los números naturales. La idea principal detrás de la inducción matemática es establecer un argumento que garantice que si la afirmación es verdadera para un número natural dado, también lo será para el siguiente número natural.

Demostración por inducción matemática: Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ no vació. Si se cumple:

(1) $0 \in S$.

(2) Si $\{0, 1, \ldots, n\} \subseteq S$, entonces $n + 1 \in S$.

Concluimos que $S = \mathbb{N}$.

El paso (1) se llama **caso base** y consiste en probar que cierta afirmación es verdadera para el número más pequeño de la secuencia, generalmente el número 0 o el número 1. Esto sirve como base para el razonamiento inductivo. Es esencial demostrar que la afirmación es verdadera para este caso base. El paso (2) se llama **paso de inducción** en este se asume que la afirmación es verdadera para un número natural n dado, lo cual se conoce como la hipótesis de inducción. Luego, se demuestra que la afirmación también es verdadera para el número $n+1$, es decir, se demuestra que si la afirmación es verdadera para n, entonces también lo será para $n+1$.

En resumen, la inducción matemática es un método de demostración que consta de un caso base y un paso de inducción. Se demuestra que la afirmación es verdadera para el caso base y luego se muestra que, si es verdadera para un número dado, también lo será para el siguiente número. Esto establece que la afirmación es verdadera para todos los números naturales sucesivos a partir del caso base. La inducción matemática es una herramienta poderosa y ampliamente utilizada en matemáticas para demostrar teoremas y propiedades.

Si bien hablamos de una afirmación, pero en el método solo aparece un subconjunto S, entonces ¿como relacionamos una afirmación con dicho conjunto? Para ver como se usa este método lo ejemplificaremos con el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo 3.9.1.** *Demuestre que* $0+1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dem.
Sea $S = \left\{ n \in \mathbb{N} : 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \right\}$.

(1) *Claramente,* $0, 1 \in S$, *pues* $0 = \frac{0(0+1)}{2}$ *y* $0+1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

(2) *Supongamos que* $\{0, 1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$. *Veamos que* $n+1 \in S$. *Tenemos que* $n \in S$, *es decir,*

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $n+1 \in S$.

Por el principio de inducción matemática,s e concluye que $S = \mathbb{N}$, *es decir, para toda* $n \in \mathbb{N}$, *se cumple* $0+1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Q.E.D

Capítulo 4

Funciones elementales y sus gráficas

Las funciones elementales son un conjunto fundamental de funciones matemáticas que desempeñan un papel crucial en diversas ramas de las matemáticas y en aplicaciones prácticas. Nosotros hablaremos generalmente de las siguientes categorías: algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas.

Las funciones algebraicas incluyen polinomios y fracciones racionales.

Las funciones exponenciales están relacionadas con exponentes y potencias. Se caracterizan por tener una variable en el exponente, y son fundamentales en el estudio de fenómenos que crecen o decrecen de manera exponencial.

Las funciones logarítmicas son inversas de las funciones exponenciales. Representan el logaritmo de un número y son esenciales para resolver ecuaciones exponenciales y para trabajar con magnitudes que varían en órdenes de magnitud diferentes.

Las funciones trigonométricas están relacionadas con los ángulos y las razones entre los lados de un triángulo. Son fundamentales en geometría, física y otras disciplinas científicas, y se utilizan para describir fenómenos periódicos.

Las funciones hiperbólicas son análogas a las funciones trigonométricas, pero están definidas en términos de exponenciales. Aparecen en una amplia gama de contextos matemáticos y físicos, especialmente en problemas que involucran sistemas dinámicos y fenómenos oscilatorios.

Estas cinco categorías de funciones elementales son herramientas esenciales en el arsenal matemático que todo estudiante de Ciencias Básicas e Ingeniería debe manejar como cultura general. Ya qué sus aplicaciones se encuentran en una gran variedad de campos, desde el cálculo y el álgebra hasta la física, la ingeniería y la estadística. Su comprensión y manipulación son fundamentales para resolver problemas complejos y modelar fenómenos del mundo real.

4.1. Gráfica de una función

Entender una función de manera abstracta es muy importante, pero también es de gran ayuda si pudiéramos visualizarlo y eso es muy importante en ingeniería.

Definición 4.1.1. *Si $f : A \longrightarrow B$ es una función, entonces su gráfica se define como:*

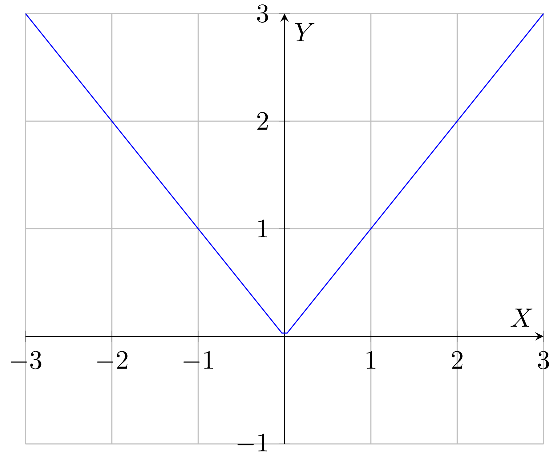
$$G_f := \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Dada una función $f : A \longleftarrow B$, para visualizar su gráfica, lo único que debemos hacer es ubicar los punto de G_f sobre el producto cartesiano en la que emana dicha función. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$.

■ **Ejemplos 4.1.2.** *Consideremos la siguiente función $|\square| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$|x| := \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}$$

Es decir, lo que es positivo lo deja igual y lo que es negativo lo hace positivo, esta función recibe el nombre de ***valor absoluto*** *(esta función es muy importante). Veamos su gráfica:*



En estas notas, no reduciremos a funciones cuyo dominio es un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Muchas funciones en matemáticas se construyen a partir de otras más simples a los que llamaremos funciones de «bloques de construcción». Por ejemplo,realizando operaciones como: Suma, resta, multiplicación, división y composición podemos obtener nuevas funciones.

Proposición 4.1.3. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $f, g : A \longrightarrow B$ funciones. Las siguientes son funciones:*

- $A \ni x \xmapsto{f+g} f(x) + g(x) \in B,$
- $A \ni x \xmapsto{f-g} f(x) - g(x) \in B,$
- $A \ni x \xmapsto{fg} f(x)g(x) \in B,$
- $A \ni x \xmapsto{\frac{f}{g}} \frac{f(x)}{g(x)} \in B$ *siempre que* $g(x) \neq 0$ *para todo* $x \in A$.
- *Si* $h : X \longrightarrow A$ *con* $X \subseteq \mathbb{R}$*, entonces* $X \ni x \xmapsto{f \circ h} f(h(x)) \in B$ *es función.*

Las anteriores son formas de obtener nuevas funciones, aunque no son las únicas si que son muy importantes. En las próxima secciones iniciamos con el desglose de las funciones elementales.

4.2. Funciones algebraicas

La palabra "variable" se utiliza en matemáticas para representar elementos que pueden cambiar o adoptar diferentes valores. En un contexto matemático, una variable es un símbolo utilizado para representar una cantidad desconocida o que puede variar en una determinada situación o problema. La introducción de variables permite expresar relaciones y ecuaciones en términos generales.

Definición 4.2.1. *Sean $x_1, \ldots, x_k$variables. Un* ***monomio*** *es un productos de potencias de las $x_i's$ con* ***coeficiente*** *un número real, es decir, es de la forma*

$$cx_1^{n_1} \cdots x_n^{n_k} \text{ donde } c \in \mathbb{R} \text{ y } n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}.$$

El ***grado de un monomio*** *se define como la suma de sus potencias, esto es, $gr(cx_1^{n_1} \cdot x_n^{n_k}) = n_1 + \cdots + n_k$.*

Un polinomio en varias variables $x_1, \ldots, x_n$ es una suma de monomios. Y el grado del polinomio se define como el grado más alto de us monomios.

Definición 4.2.2. *Un polinomio de grado n con k variables $x_1, \dots, x_k$ se escribe como:*

$$p(x_1, \dots, x_k) = \sum_{n_1+\dots+n_k \leq n} a_{n_1,\dots,n_k} x^{n_1} \dots x^{n_k}.$$

Donde los $a_{n_1,\dots,n_k} \in \mathbb{R}$.

En el caso de tener una sola variable o dos, es común usar únicamente x y x, y, respectivamente, aunque claro se puede usar cualquier letra para representar las variables correspondientes.

Polinomio de una variable x:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Polinomio de dos variables variable x, y:

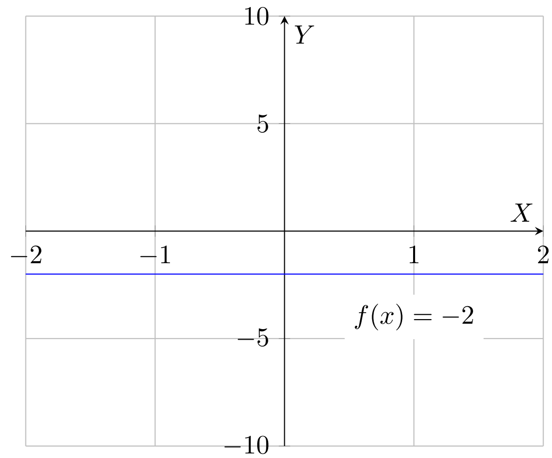
$$p(x, y) = a_{n,0} x^n + a_{n-1,1} x^{n-1} y + +a_{n-2,2} x^{n-1} y^2 \dots + a_{0,0}.$$

Nos dedicaremos mayormente al estudio de los polinomios de una variable. Veamos los ejemplos más comunes:

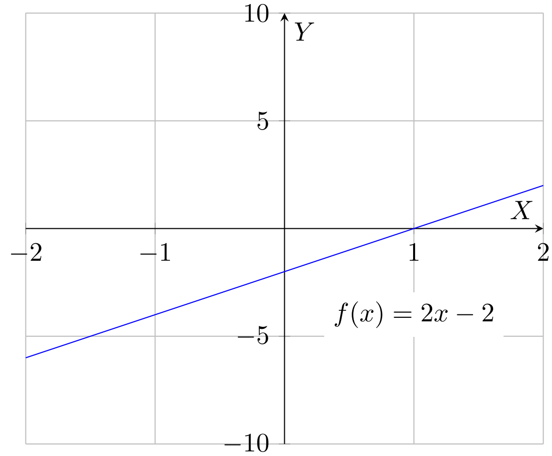
Grado cero	a	**función contante**
Primer grado	$ax + b$	**función lineal**
Segundo grado	$ax^2 + bx + c$	**función cuadrarica**
Tercer grado	$ax^2 + bx^2 + cx + d$	**función cubica**

No tenemos aún mucha herramienta para graficarlas, pero podemos darnos una idea de como son si empezamos a darle valores a x, es decir, realizar el método de tabulación. Veamos unos ejemplos de gráficas.

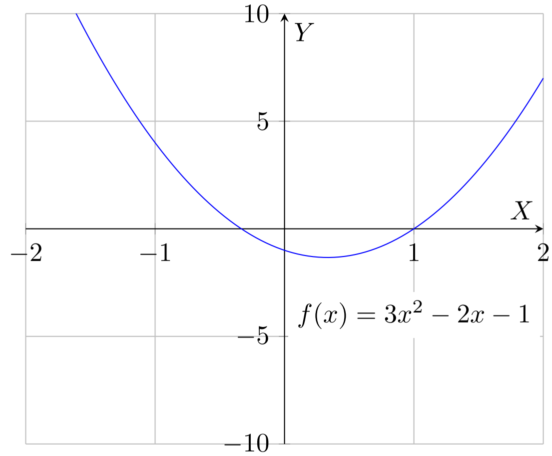
De manera formal, si A y B son conjuntos no vacíos, entonces una función constante se define como sigue: sea $a \in A$ fijo y $f : A \Longrightarrow B$ dada por $f(x) = a$ para todo $x \in A$. Si pensamos en algo mucho más concreto como que $A \subseteq \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ y $a = 2$, entonces la gráfica se ve como sigue:



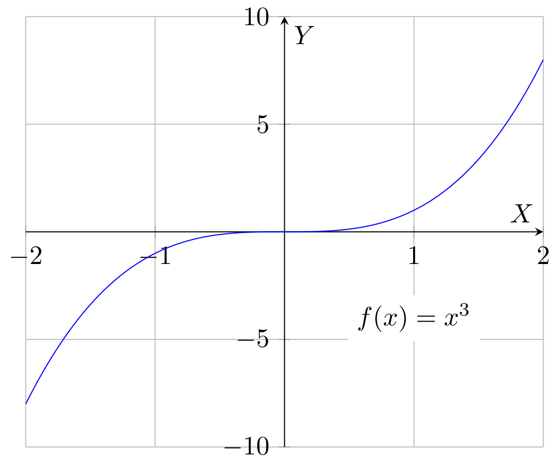
De manera similar, para el caso de función lineal, si $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $a = 2$ y $b = 1$, entonces la regla de correspondencia es $f(x) = 2x - 2$ y si gráfica se ve como sigue:



Para la función cuadrática, sea $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $a = 3, b = -2, c = -1$, entonces la regla de correspondencia es $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ y si gráfica se ve como sigue:



Finalmente, para la función cubica. Sea $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ y $a = 1, b = c = d = 0$, entonces la regla de correspondencia es $f(x) = x^3$ y si gráfica se ve como sigue:



Sean $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ polinomios, entonces podemos realizar, suma, resta, producto de esto como sigue (considerar que $x^0 := 1$):

- **Suma de polinomios:**

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i.$$

- **Resta de polinomios:**

$$p(x) - q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i)x^i.$$

- **Producto de polinomios:**

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i, \text{, donde } c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}.$$

■ **Ejemplo 4.2.3.** *Sea* $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ *y* $Q(x) = 4x^2 + 2x - 1$ *polinomios.*

- ***Suma:***

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (2x^3 - x^2 + 3x + 1) + (4x^2 + 2x - 1) \\ &= 2x^3 + 3x^2 + 5x \end{aligned}$$

- ***Resta:***

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (2x^3 - x^2 + 3x + 1) - (4x^2 + 2x - 1) \\ &= 2x^3 - 5x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

- ***Producto:***

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x^3 - x^2 + 3x + 1) \cdot (4x^2 + 2x - 1) \\ &= 8x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 12x^3 + 6x^2 - 3x + 4x^2 + 2x - 1. \\ &= 8x^5 + 8x^3 + 11x^2 - x - 1. \end{aligned}$$

Claramente, podremos hablar de suma, resta y producto de polinomios en varias variables, pero la notación se complica un poco más. Por otro lado, nos falta introducir el cociente entre polinomios, más sin embargo, para esto, es necesario introducir en concepto de **función racional**.

Definición 4.2.4. *Una* ***función racional*** *de varias variables* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *se define como el cociente de dos polinomios, es decir, es de la forma:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{p(x_1, \ldots, x_n)}{q(x_1, \ldots, x_n)}.$$

En particular, una función racional en una variable se ve como $\frac{p(x)}{q(x)}$. Es importante mencionar que el dominio de una función racional excluye todos los valores de la variable para los cuales el denominador es cero.

■ **Ejemplo 4.2.5.** *Si* $p(x) = x - 3$ *y* $q(x) = x + 5$*, entonces* $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ *tiene como dominio a* $\mathbb{R} - \{-5\}$.

Usando el ejemplo previo y con unos cuantos cálculos, podemos mostrar que $\frac{x-3}{x+5}$ es igual a $1 - \frac{8}{x+5}$. Y esto tiene que ver con el concepto de **división de polinomios** y además del algoritmo que usamos para realizarlo.

Teorema 4.2.6. *Sean $u(x)$ y $v(x)$ polinomios con $gr(u(x)) \geq gr(v(x))$ y $v(x) \neq 0$. Entonces, existen $q(x), r(x)$ polinomios tales que*

$$u(x) = q(x)v(x) + r(x).$$

Donde $gr(r(x)) < gr(v(x))$.

A los elementos $u(x), v(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ se les llama **dividendo, divisor, cociente y residuo**, respectivamente. Para encontrar los polinomios $q(x)$ y $r(x)$ se implementa un algoritmo llamado **algoritmo de la división** que emana de la demostración del teorema previo.

■ **Ejemplo 4.2.7.** *Dividir $3x^2 + x - 1$ por $x + 1$*

$$\begin{array}{rr|l} 3x^2 & +x-1 & x+1 \\ \cline{3-3} -3x^2-3x & & 3x-2 \\ \cline{1-1} & -2x-1 & \\ & 2x+2 & \\ \cline{2-2} & 1 & \end{array}$$

Los polinomios más simples no triviales son los lineales, es decir, de la forma $x - \alpha$. ¿Como se ve un polinomio al dividirlo por uno de estos?

Teorema 4.2.8 (Teorema del resto)**.** *Sea $p(x)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, existen $q(x)$ polinomio y $R \in \mathbb{R}$ tales que*

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + R$$

, donde R es constante. Además, $p(\alpha) = R$.

Dem.
Por el algoritmo de la división, se sigue que existen $q(x), r(x)$ polinomios con $gr(r(x)) < gr(x - \alpha) = 1$ tales que

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x),$$

y como $gr(r(x)) < 1$ se sigue que $gr(r(x)) = 0$, es decir, $r(x) = R \in \mathbb{R}$. Esto prueba lo deseado.

Q.E.D

El teorema del resto también lo podemos representar como:

$$\frac{p(x)}{x - \alpha} = q(x) + \frac{R}{x - \alpha}.$$

En el ejemplo previo, podemos observar que $3x^2 + x - 1 = (x + 1)(3x - 2) + 1$, en este caso,$\alpha = -1$, $3x - 2 = q(x)$ y $R = 1$. Un caso especial es cuando $R = 0$ y tiene un nombre especial.

Definición 4.2.9. *Sea $p(x)$ un polinomio y $\alpha \in \mathbb{R}$.*

- *α es un* ***cero*** *de $p(x)$ si $p(\alpha) = 0$.*
- *α es una* ***raíz de la ecuación*** *$p(x) = 0$ si es solución de la misma.*
- *$x - \alpha$ es un factor de $p(x)$ si existe un polinomio $q(x)$ tal que $p(x) = (x - \alpha)q(x)$.*

Obsérvese que estos conceptos van muy bien de la mano, pero es importante distinguir cada termino, pues hacen referencia a diferentes situaciones.

■ **Ejemplo 4.2.10.** *Consideremos el polinomio como antes $p(x) = x^2 - 5x + 6$, entonces*

- *$x = 2$ es un cero de $p(x)$, pues $p(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 0$.*

- *$x = 2$ es un raíz de la ecuación $p(x) = 0$.*
- *$x - 2$ es un factor de $p(x)$, pues $p(x) = (x-2)(x-3)$.*

Teorema 4.2.11 (Teorema del factor)**.** *Sea $p(x)$ un polinomio. Si $p(\alpha) = 0$, entonces $x - \alpha$ es un factor de $p(x)$.*

Una pregunta natural es, ¿se puede dividir cualquier polinomio en factores lineales? La respuesta es afirmativa.

Teorema 4.2.12 (Teorema Fundamental del Álgerba)**.** *Si p(x) es un polinomio de grado n con coeficientes reales (o complejos), entonces existe $c, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que*

$$p(x) = c \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i).$$

Donde los α_i's pueden ser los mismos.

Entonces la incógnita principal es, ¿como encontramos esos α_i's? esta respuesta no es sencilla de responder. Al proceso de búsqueda de esos factores lleva como nombre **factorización**. Aunque se supone que el alumno ya posea algunas técnicas de factorización obtenidas en su formación pre-universitaria, no esta de más recordar algunos.

El siguiente resultado, es el origen de el proceso de factorización llamado **división sintética**.

Teorema 4.2.13 (Teorema de Gauss)**.** *Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbb{Z}$ con $i \in \{0, \ldots, n\}$. Si $p(x)$ tiene un cero racional, entonces este cero debe ser de la forma $\frac{p}{q}$ reducida$\mathrm{mcd}(p,q) = 1$, donde $p|a_0$, $q|a_n$.*

■ **Ejemplo 4.2.14.** *Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$. Encontremos una raíz racional (si la tiene), como el coeficiente de la mayor potencia es 1, entonces las raíces deben ser enteras.*

Los divisores enteros de 6 son $-1, -2, -3, -6, 1, 2, 3, 6$, así que estos son los posibles candidatos a ser ceros de $p(x)$. Evaluemos a todos para ver cual da cero.

$$\begin{array}{cccc} p(1) = -6 & p(2) = 4 & p(3) = 30 & p(6) = 264 \\ p(-1) = -1 & p(-2) = 0 & p(-3) = -6 & p(-6) = -132 \end{array}$$

Por lo tanto, $x = -2$ es una raíz de $p(x)$. Y de hecho, se puede ver como $p(x) = (x+2)(x^2-3)$.

Finalicemos esta sección, con el estudio particular de los polinomios del tipo $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, es decir, los polinomios de grados 2. Obsérvese que $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$, esto nos permite observar que un cero de $ax^2 + bx + c$ es un cero de $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ y viceversa, por lo que podemos centrar nuestro estudio en los polinomios de la forma $x^2 + bx + c$ (abusando de la notación).

Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que este polinomio tiene dos factores lineales, digamos $x + \alpha$ y $x + \beta$, esto es, $x^2 + bx + c = (x+\alpha)(x+\beta) = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$, en otras palabras, $b = \alpha + \beta$ y $\alpha\beta = c$, es decir, para factorizar, debemos fijarnos en los divisores de c, escoger dos que sumado nos de b.

Otra manera de factorizar un polinomio es conociendo los productos notables, en listaré algunos de ellos:

- Cuadrado de la suma:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Diferencia de cuadrados:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

- Cubo de un binomio:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- Cuadrado de la diferencia:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Diferencia de cubos:

$$(a-b)(a^2 + ab + b = 2) = a^3 - b^3$$

- Suma de cubos:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

- Suma de potencias n-ésimas solo si n es impar:

$$(a+b)\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a^{(n-1)-i} b^i\right) = a^n + b^n$$

- Resta de potencias n-ésimas:

$$(a-b)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{(n-1)-i} b^i\right) = a^n - b^n$$

El uso de estos productos dependerá de cada individuo, pero básicamente consiste en ver la forma en algún problema en particular.

4.3. Funciones exponenciales

La subsección anterior nos dio un panorama amplio de funciones como $\mathbb{R} \ni x \overset{f}{\mapsto} x^2 \in \mathbb{R}$. Intercambiando x y 2 producimos una función diferente $\mathbb{R} \ni x \overset{f}{\mapsto} 2^x \in \mathbb{R}$. Esta nueva función presenta una marcada disparidad con una función potencial y cuenta con numerosas propiedades distintivas. Se llama una *función exponencial*.

Definición 4.3.1. *Sea $a \in \mathbb{R}$ positivo y $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$. A la función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$ se llama **función exponencial** con base a.*

Si bien, debe darse por sentado el conocimiento de las leyes de los exponentes, este apartado le daremos un pequeño repaso. Recuerde que en una expresión como a^n en el cual a es elevado a la potencia n, el número a es llamado la **base** y n el exponente.

Repaso de los exponentes. Vamos a empezar. Para un número $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}_0$,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces}}.$$

Esto sería demasiado elemental para mencionarlo, excepto que todas las propiedades significativas de los exponentes se derivan de él.

En listemos todas las leyes de los exponentes más usadas y cuyo prueba se realiza considerando la definición previa y tomando las siguientes consideraciones $a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = 1$, $a^{-n} := (a^{-1})^n$ y $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Consideremos $a > 0$ y $n, m \in \mathbb{Z}$:

- $a^1 = 1$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $(a^n)^m = a^{mn}$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Note que 0^0 no esta definido(no se puede).

¿Qué hay de las potencias con fracciones, como $a^{\frac{1}{n}}$? Para explicar eso, es importante recordar que el actual símbolo de la raíz cuadrada ($\sqrt{\ }$) fue introducido en 1525 por el matemático *Christoph Rudolff* para representar la operación que consiste en que cada número real x se le asocia el único número no negativo y que elevado al cuadrado es igual a x, es decir, consiste en hallar el número y del que se conoce su cuadrado $y^2 = x$. El signo no es más que una forma estilizada de la letra r minúscula para hacerla más elegante alargándola con un trazo horizontal, hasta adoptar el aspecto actual, que representa la palabra latina radix, que significa raíz.

¿Por qué decimos que $(\sqrt{x}) = x^{1/2}$? Esto tiene que ver con la preservación de las leyes de los exponentes, si pensamos en que se cumplen dichas leyes. Tendremos lo siguiente; $x = x^{(\frac{1}{2})2} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2$. Así, se puede definir $\sqrt{x} := x^{1/2}$. Similarmente, para la raíz n-ésima, esto es $\sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}}$. Lo mejor de esto, es que se siguen cumpliendo las leyes de los exponentes antes mencionados y todos los que existan.

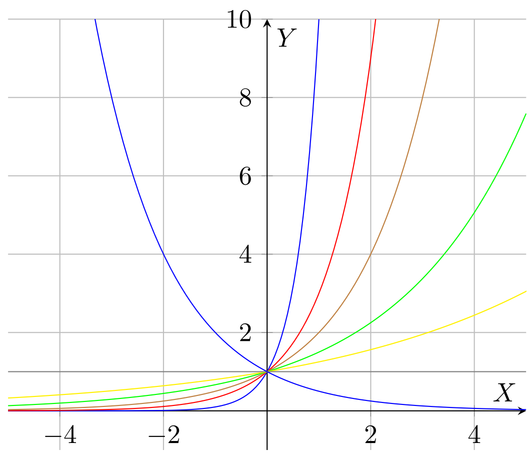
Por otro lado, ¿podemos hablar de potencias con números irracionales? Es decir,¿se puede escribir definir algo como 2^π? La respuesta es afirmativa, pero es necesario la introducción de limites, además de tener conocimiento de la densidad de los racionales sobre los reales. Por ello, en caso de usarlo, daremos por hecho de que dichos exponentes pueden existir. Y si desean profundizar en el tema, cuando se tenga la herramienta podrán intentar definirlo. Lo pondré aquí, pero no se pretende que se entienda hasta este momento:

Definición 4.3.2. *Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{I}$. Se define, x^α como:*

$$a^\alpha = \lim_{n\to\infty} x^{\frac{p_n}{q_n}}$$

donde $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$.

Sin más preámbulo, veamos como se ven las gráficas de algunas de funciones exponenciales:



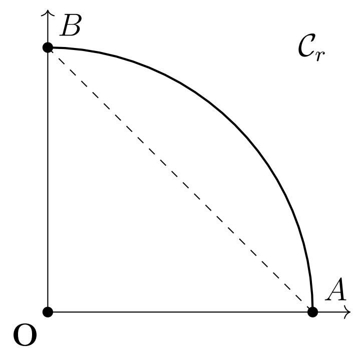
En la figura previa, se puede observar que cada función exponencial, intersectar al eje Y en en $x = 0$, es decir, $f(0) = 1$. Además se puede observar que si la base a es mayor que 1, es decir, $a > 1$, entonces la función crece y si $0 < a < 1$, entonces la función decrece.

4.4. Funciones trigonométricas

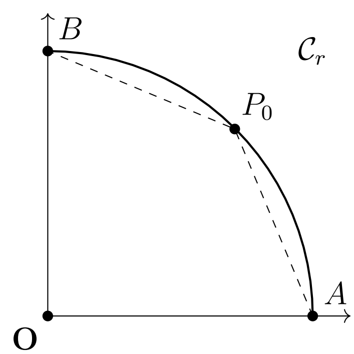
En este apartado hablaremos de las funciones trigonométricas (o funciones circulares), principalmente de las funciones trigonométricas básicas; *seno* y *coseno*. Para dar una idea intuitiva de estas funciones, es necearía hablar de idea intuitiva de longitud de arco de una circunferencia.

La noción intuitiva que subyace a la definición de longitud de arco para curvas es que una línea recta representa la distancia más corta entre dos puntos, y que podemos estimar la longitud de una curva mediante la suma de las longitudes de segmentos rectos que conectan una secuencia de puntos en la curva. Si consideramos que la línea recta es la distancia más corta entre dos puntos, entonces la suma de las longitudes de los segmentos rectos no puede ser mayor que la longitud de la curva. En otras palabras, la longitud de la curva debe ser un valor igual o mayor que las aproximaciones obtenidas al sumar las longitudes de los segmentos rectos, y está determinada por el valor mínimo que cumple con esta condición (Después de estudiar el axioma del supremo, podemos decir que la longitud de la curva es el supremo de todas estas aproximaciones poligonales).

Consideremos $\mathcal{C}_r$ una circunferencia de radio r con centro en $\mathbf{O}$. Sean A y B puntos sobre $\mathcal{C}_r$. El arco de la circunferencia levógiro sobre $\mathcal{C}_r$ de A a B se denota como $\mathbf{Arc}(AB)$, y la longitud del arco se denota por $|\mathbf{Arc}(AB)|$ y llamémosle s, esta cantidad es lo que deseamos definir. Una primera aproximación a s es considerando la longitud s_0 de la recta AB (ver figura de abajo).



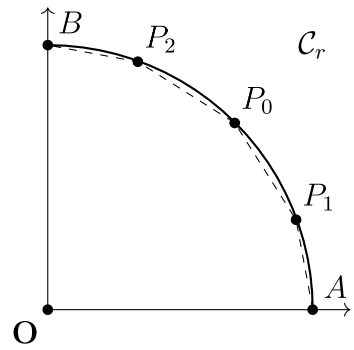
Evidentemente se cumple que; $s_0 < s$. Si ahora, tomamos un punto P_0 en $\mathbf{Arc}(AB)$ y consideremos el polígono AP_0B (ver figura de abajo).



El polígono AP_0B tiene longitud:

$$s_1 = \mathbf{long}(BP_0) + \mathbf{long}(P_0B).$$

Y de nuevo $s_1 < s$, más aún, por la desigualdad del triangulo tendremos que $s_0 < s_1$. Ahora, a los arcos $\mathbf{Arc}(AP_0)$ y $\mathbf{Arc}(P_0B)$ podemos subdividirlos seleccionando un punto P_1 en el arco $\mathbf{Arc}(AP_0)$, un punto P_2 en el arco $\mathbf{Arc}(P_0B)$ y considerar el polígono $AP_1P_0P_2B$ como en la figura de abajo.



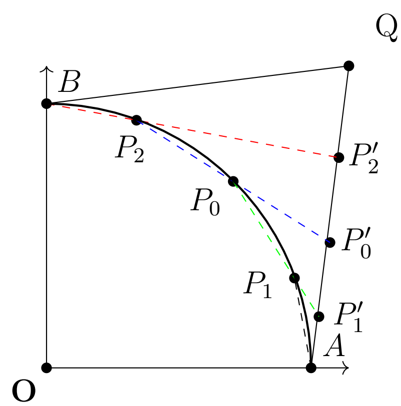
El polígono $AP_1P_0P_2B$ tiene longitud

$$s_2 = \mathbf{long}(AP_1) + \mathbf{long}(P_1P_0) + \mathbf{long}(P_0P_2) + \mathbf{long}(P_2B).$$

Tenemos que $s_2 < s$ y que además por la desigualdad del triangulo tendremos que $s_1 < s_2$. Este proceso lo podemos ir aplicando a cada sub-arco obtenido en el paso previo, es decir, de manera inductiva y así obtenemos una sucesión creciente:

$$s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n < \cdots .$$

Ahora bien, los s_n no aumentan sin limite; pues todos ellos son menores a cualquier linea poligonal externa. Para ilustrar esto, consideremos s_2 y tómese un punto Q fuera del circulo, arriba o encima de la recta $y = r$, del lado del $\mathbf{Arc}(AB)$ (puede ser $Q = (r+1, r+1)$) y considere los segmentos de linea BQ y QA, después extienda cada segmento del polígono hasta tocar el segmento QA como se muestra en la siguiente figura.



Aplicando la desigualdad del triangulo al caso ilustrado obtenemos las siguientes desigualdades:

(1) $\mathbf{long}(BP_2) + \mathbf{long}(P_2P_2') = \mathbf{long}(BP_2') < \mathbf{long}(BQ) + \mathbf{long}(QP_2')$
(2) $\mathbf{long}(P_2P_0) + \mathbf{long}(P_0P_0') = \mathbf{long}(P_2P_0') < \mathbf{long}(P_2P_2') + \mathbf{long}(P_2'P_0')$
(3) $\mathbf{long}(P_0P_1) + \mathbf{long}(P_1P_1') = \mathbf{long}(P_0P_1') < \mathbf{long}(P_0P_0') + \mathbf{long}(P_0'P_1')$
(4) $\mathbf{long}(P_1A) < \mathbf{long}(P_1P_1') + \mathbf{long}(P_1'A)$

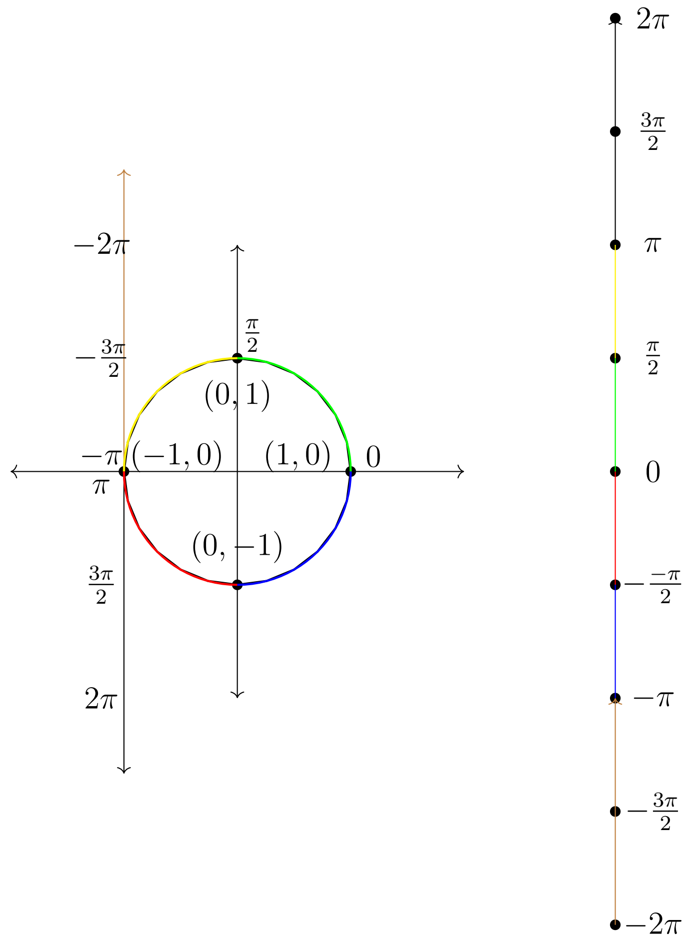
Sumando todos estas desigualdades y quitando términos comunes en ambos lados, nos que da que

$$s_2 < \mathbf{long}(BQ) + \mathbf{long}(QA).$$

De esta forma se muestra que todos los s_n con $n \in \mathbb{N}$ tienen una cota superior. Entonces dicha sucesión tiene un supremo (esté es el axioma del supremo de los números reales), es decir, que existe un número mínimo s, con la propiedad de que $s_n < s$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Este número s es por definición la longitud del $\mathbf{Arc}(AB)$.

■ **Ejemplo 4.4.1.** *El número π se define como la longitud del arco semicircular de radio 1.*

Ahora, notemos que en el paso anterior estábamos dividiendo un arco de un círculo. Pero, ¿cómo identificamos esos puntos? es decir, ¿como encontramos sus coordenadas? Es importante recordar que en el sistema de coordenadas cartesianas ($\mathbb{R}^2$), un punto se describe mediante dos valores: uno corresponde al eje de las abscisas (X) y el otro al eje de las ordenadas (Y). Entonces, ¿cómo determinamos qué valor corresponde a cada eje? Una forma práctica de medir la longitud de un arco circular es utilizando el método que nos enseñaron en la primaria: envolver un hilo o cinta flexible alrededor de la circunferencia. Desde un punto de vista analítico, podemos conceptualizar esto como un desplazamiento continuo y sin deformaciones de la recta de los números reales ($\mathbb{R}$) alrededor de la circunferencia. Para ello, consideremos la circunferencia $\mathcal{C}$ de radio 1 y centro en el origen en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Sabemos que la longitud de la circunferencia $\mathcal{C}$ es 2π. Podemos enrollar la recta numérica de dos maneras diferentes; seleccionemos la dirección levógira como positiva para medir distancias (opuesta al movimiento de las manecillas del reloj) y la dextrógira como negativa. Luego, medimos distancias sobre $\mathcal{C}$ desde el punto $(1, 0)$ ubicando el 0 de la recta numérica sobre dicho punto. De este modo, visualizamos la mitad positiva de la recta numérica $\mathbb{R}$ enrollada en dirección levógira, y la otra mitad negativa enrollada en dirección dextrógira, ver la siguiente figura:

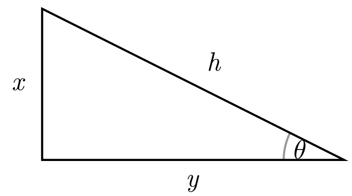


Obsérvese que:

1) El intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ cubre el primer cuadrante, el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ cubre el segundo cuadrante y así sucesivamente.

2) El intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ cubre el cuarto cuadrante, el intervalo $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ cubre el tercer cuadrante y así sucesivamente.

Considere un triangulo rectángulo con ángulo θ y lados x, y y h como se muestra en la siguiente imagen:



Donde y es el cateto opuesto a θ, x es el cateto adyacente a θ y h es la hipotenusa.

4.5. Funciones hiperbólicas

Bibliografía

[1] M. Fernández, L. M. Villegas (2014). *Lógica Matemática I: lógica proposicional, intuicionista y modal.* Primera reimpresión, UAMI.

[2] S. Hedman. (2004). *A first course in logic.* Oxford University Press.

[3] G. Metakides, A. Nerode (1996).*Principles of Logic and Logic Progamming.* Elsevier, Amsterdam.