Notas CI (UAMI-CBI)

Juan Carlos Cruz González

2 de diciembre de 2023

Índice general

Capítulo 1

Ejemplos relevantes

■ **Ejemplo 1.0.1.** *Calcule la integral definida*

$$\int_1^a \ln(x)dx.$$

Usando limites de sumas de Riemann.

Recordar que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ si y solo si para toda sucesión $a_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$, se tiene que $f(a_n) \to L$ cuando $n \to \infty$.

De esta manera, dado que la función exponencial de base $b \in (0,1) \cup (1,\infty)$ para $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ dada por $f_a(x) = a^x$, tiene como derivada $\frac{d}{dx}(f_a(x)) = \ln(a)a^x$. En particular,

$$\ln(a) = \frac{d}{dx}(f_a(x))|_{x=0} = \lim_{h\to 0} \frac{f_a(0+h) - f_a(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Así, dado que la sucesión $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \to 0$ cuando $n \to \infty$, se sigue que

$$\ln(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/n} - 1}{1/n} = \lim_{n\to\infty} n(a^{1/n} - 1).$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la partición $P = \{1 = a^{0/n}, a^{1/n}, \ldots, a^{n/n} = a\} \in \mathcal{P}([1,a])$, dicha partición genera los subintervalos $I_k = \left[a^{\frac{k-1}{n}}, a^{\frac{k}{n}}\right]$ con $k = 1, \ldots, n$, así;

$$\begin{aligned}
\int_1^a \ln(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(a^{k/n})(a^{\frac{k}{n}} - a^{\frac{k-1}{n}}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(a)\frac{k}{n}(a^{\frac{k}{n}} - a^{\frac{k-1}{n}}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\ln(a)}{n} \sum_{k=1}^{n} k(a^{\frac{k}{n}} - a^{\frac{k-1}{n}})\right].
\end{aligned}$$

Llegado a este punto, pueden haber tres posibles caminos de solución.

- Primer camino (usando sumas telescópicas):

$$\int_1^a \ln(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\ln(a)}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(ka^{\frac{k}{n}} - ka^{\frac{k-1}{n}}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a)}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(ka^{\frac{k}{n}} - (k-1+1)a^{\frac{k-1}{n}}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a)}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(ka^{\frac{k}{n}} - (k-1)a^{\frac{k-1}{n}} - a^{\frac{k-1}{n}}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a)}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(ka^{\frac{k}{n}} - (k-1)a^{\frac{k-1}{n}}\right) - \sum_{k=1}^{n} a^{\frac{k-1}{n}}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a)}{n}\left[na^{\frac{n}{n}} - (1-1)a^{\frac{1-1}{n}} - \sum_{k=1}^{n} a^{\frac{k-1}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a)}{n}\left[na - \sum_{k=1}^{n} a^{\frac{k-1}{n}}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a)}{n}\left[na - \frac{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1}{a^{\frac{1}{n}}-1}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(a)}{n}na - \frac{\ln(a)}{n}\frac{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1}{a^{\frac{1}{n}}-1}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[a\ln(a) - \ln(a)\frac{a-1}{n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)}\right] = a\ln(a) - \ln(a)\frac{a-1}{\ln(a)} = a\ln(a) - (a-1)$$
$$= a\ln(a) - a + 1 = a\ln(a) + 1 - a$$

- Segundo y tercer camino consiste en factorizar $a^{\frac{k}{n}}$ ó $a^{\frac{k-1}{n}}$ de la suma, respectivamente. Ambos procedimientos son similares, de hecho, solo dos pasos serán diferentes y el resto se convierte en lo mismo. Observemos que pasa cuando factorizamos $a^{\frac{k}{n}}$ de la suma:

$$\int_1^a \ln(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\ln(a)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}a^{\frac{k}{n}}\left(1 - a^{-\frac{1}{n}}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\ln(a)\left(1 - a^{-\frac{1}{n}}\right)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}a^{\frac{k}{n}}\right]$$

Observemos que ocurre si factorizamos $a^{\frac{k-1}{n}}$ de la suma:

$$\int_1^a \ln(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\ln(a)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}a^{\frac{k-1}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\ln(a)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}a^{\frac{k}{n}}a^{-\frac{1}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\ln(a)a^{-\frac{1}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}a^{\frac{k}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\ln(a)\left(1 - a^{-\frac{1}{n}}\right)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}a^{\frac{k}{n}}\right]$$

Hemos visualizado que estos dos últimos caminos a partir de cierto punto el procedimiento será el mismo. Ahora, en clase les mencione que este camino, tendríamos que tener en mente la derivada de potencias de la forma x^{α}, en nuestro caso $x = a$ y $\alpha = k/n$. Esto es,

$$\frac{d}{da}(a^{\frac{k}{n}}) = \frac{k}{n}a^{\frac{k}{n}-1} \Rightarrow a\frac{d}{da}(a^{\frac{k}{n}}) = \frac{k}{n}a^{\frac{k}{n}}.$$

Se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}a^{\frac{k}{n}} = \sum_{i=1}^{n}a\frac{d}{da}\left(a^{\frac{k}{n}}\right) = a\frac{d}{da}\left[\sum_{i=1}^{n}a^{\frac{k}{n}}\right] = a\frac{d}{da}\left[\sum_{i=1}^{n}a^{\frac{k}{n}} + a^{\frac{0}{n}} - a^{\frac{0}{n}}\right]$$
$$= a\frac{d}{da}\left[\sum_{i=0}^{n}a^{\frac{k}{n}} - 1\right] = a\frac{d}{da}\left[\sum_{i=0}^{n}a^{\frac{k}{n}}\right] = a\frac{d}{da}\left[\frac{a^{\frac{n+1}{n}}-1}{a^{\frac{1}{n}}-1}\right]$$
$$= a\left[\frac{\frac{n+1}{n}a^{\frac{n+1}{n}-1}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) - \left(a^{\frac{n+1}{n}}-1\right)\left(\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}\right)}{\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)^2}\right]$$
$$= (a)\left(a^{\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\left[\frac{(n+1)\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) - \left(a^{\frac{1}{n}} - a^{-1}\right)}{\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)^2}\right]$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\int_1^a \ln(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \ln(a)\left(1-a^{-\frac{1}{n}}\right)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}a^{\frac{k}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty} \ln(a)\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{a^{\frac{1}{n}}}\right)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}a^{\frac{k}{n}}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty} \ln(a)\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{a^{\frac{1}{n}}}\right)(a)\left(a^{\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\left[\frac{(n+1)\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)-\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-1}\right)}{\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)^2}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty} a\ln(a)\left(\frac{1}{n}\right)\left[\frac{(n+1)\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)-\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-1}\right)}{a^{\frac{1}{n}}-1}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty} a\ln(a)\left[\frac{(n)\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)+\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)-\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-1}\right)}{n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty} a\ln(a)\left[\frac{(n)\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)+\left(a^{-1}-1\right)}{n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)}\right] = a\ln(a)\left[\frac{\ln(a)+a^{-1}-1}{\ln(a)}\right]\\
&= a\ln(a)+1-a
\end{aligned}
$$

Sin duda, el primer método que se vio en clase es más simple, el segundo y tercero son más laboriosos.