Calculo Diferencial
UAM-I CBI

Dr. Juan Carlos Cruz González

Mayo 2023

Índice general

Introducción

El Cálculo Diferencial es una disciplina matemática esencial para los estudiantes de Ciencias Básicas e Ingeniería (CBI) en la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM). Este campo del conocimiento nos permite comprender y analizar cómo las funciones cambian en relación con las variables independientes, así como estudiar fenómenos naturales y físicos de manera rigurosa.

En el contexto de CBI en la UAM, el Cálculo Diferencial proporciona las herramientas necesarias para estudiar conceptos clave, como límites, continuidad y derivadas. Estos conceptos son fundamentales para el análisis y la modelización de fenómenos en áreas como la física, la química, la biología, la ingeniería y otras disciplinas relacionadas.

En este curso de Cálculo Diferencial en CBI en la UAM, Unidad Iztapalapa, exploraremos los principios fundamentales, necesario y suficientes que te permitirán desarrollar una sólida comprensión de este campo de estudio. Comenzaremos revisando conceptos básicos, como las funciones y sus propiedades, para luego adentrarnos en el estudio de los límites y su importancia en la definición de las derivadas.

Desarrollaremos técnicas para el cálculo de derivadas y exploraremos su interpretación geométrica. Además, abordaremos las reglas de derivación que nos permiten simplificar y resolver problemas más complejos. También analizaremos aplicaciones de las derivadas, como la optimización de funciones, el análisis de tasas de cambio y la resolución de problemas prácticos en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.

En CBI en la UAM, el Cálculo Diferencial es una herramienta esencial para el análisis cuantitativo y la resolución de problemas en diversas disciplinas. Dominar estas técnicas y conceptos te permitirá enfrentar desafíos académicos y profesionales con confianza y eficacia.

Esperamos que esta introducción te brinde una base sólida para el estudio del Cálculo Diferencial en el contexto de CBI en la UAM. Prepárate para adentrarte en un mundo de análisis matemático y aplicaciones prácticas que te acompañarán a lo largo de tu trayectoria en esta prestigiosa institución.

Capítulo 1

Gráfica y funciones

Los conjuntos desempeñan un papel fundamental en el estudio y la comprensión de las funciones matemáticas. En el contexto de las funciones, un conjunto puede referirse al dominio, al rango o a ambos.

El dominio de una función es el conjunto de todos los posibles valores de entrada o argumentos para los cuales la función está definida. Es decir, son los valores para los cuales la función tiene sentido y produce un resultado válido. Por ejemplo, *la raíz cuadrada* no está definida para valores negativos. El conjunto de dominio proporciona restricciones sobre los valores de entrada que debemos considerar al trabajar con la función.

El rango o imagen de una función, por otro lado, es el conjunto de todos los posibles valores de salida que la función puede tomar. Es decir, son los valores que la función puede tomar después de aplicar una operación o transformación a los valores del dominio. Continuando con el ejemplo anterior, la función *raíz cuadrada* tiene un rango que consiste en todos los números reales no negativos, ya que la raíz cuadrada siempre produce resultados no negativos. El conjunto de rango nos proporciona información sobre los valores que la función puede alcanzar.

Además de ser importantes para determinar el dominio y el rango de una función, los conjuntos también juegan un papel crucial en la representación gráfica de las funciones. El gráfico de una función es una representación visual de cómo los elementos del dominio se relacionan con los elementos del rango. El uso de conjuntos nos permite identificar y trazar puntos específicos en el plano cartesiano que representan la relación entre los valores de entrada y salida de una función.

En resumen, los conjuntos son esenciales en el estudio de las funciones, ya que nos ayudan a determinar las restricciones de los valores de entrada (dominio) y los posibles resultados de salida (rango). Además, los conjuntos nos permiten visualizar y comprender mejor las relaciones entre los valores de entrada y salida mediante la representación gráfica de las funciones.

1.1. Conjuntos

Si bien existe una definición axiomática de conjunto, nosotros no profundizaremos en ello, simplemente se tratará de manera intuitiva.

Definición 1.1.1 (Intuitiva)**.** *Un* ***conjunto*** *es una colección de objetos.*

Por ejemplo, una colección de libros, de animales o de números. Se usarán las letras mayúsculas del alfabeto $A, B, C, ...$ para los conjuntos y las minúsculas $a, b, \dots$ para los elementos. Para especificar los elementos de un conjunto se usarán llaves, por ejemplo

$$A = \{a, b, c\}.$$

Notación: $x \in A$ se lee; x pertenece al conjunto A, y $x \notin A$ significa que x no pertenece al conjunto A Algunos conjuntos importantes son;

- El conjunto de los números naturales: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ó $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- El conjunto de los números enteros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- El conjunto de los números racionales: $\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$.
- El conjunto de los números irracionales: Son los que no son racionales y su conjunto se denota como $\mathbb{I}$.
- El conjunto de los números reales son la unión de todos lo anteriores y se denota$\mathbb{R}$.

■ **Ejemplos 1.1.2.** *Otros ejemplos:*

1) *Sea el conjunto* $A = \{1, 3, 5, 7\}$. *Se tiene que* $5 \in A$ *y* $6 \notin A$.
2) *Sea* $A = \{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$. *En este caso* $169 \in A$, *pero* $50 \notin A$.
3) *El conjunto de las letras de la palabra México es* $\{M, é, x, i, c, o\}$.

Otros ejemplo importante es el plano cartesiano

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

.

El símbolo $\emptyset$ se usará para describir el conjunto que no tiene elementos; es este conjunto se le llama conjunto vacío. Es conveniente usar condiciones para describir conjuntos (comprensión):

■ **Ejemplos 1.1.3.**
- $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$
- $\{0, 1, 4, 9, 25, 36, \dots, m^2, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} : n = m^2, n \in \mathbb{N} \text{ es par}\}$

1.1.1. Subconjuntos

Definición 1.1.4. *Sean A y B conjuntos, se dice que B es subconjunto de A, si cada elemento de B lo es también de A, se denota $B \subseteq A$, en caso contrario se escribirá $B \nsubseteq A$.*

Obsérvese que si $B \subseteq A$, se tiene $x \in B \Rightarrow x \in A$, y viceversa, si para todo $x \in B$ se tiene $x \in A$, entonces $B \subseteq A$. En general, cuando la proposición P se cumple si y sólo si se cumple la proposición Q, escribiremos $P \iff Q$.

Bajo esta notación, la observación anterior se puede rescribir así

$$B \subseteq A \iff (x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Si $B \subseteq A$, se puede escribir también $A \supseteq B$, y se dirá que B está contenido en A, o que A contiene a B.

■ **Ejemplos 1.1.5.**
1. *Observese que* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *y* $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.
2. *Si* $A = \{x : x \text{ es una golondrina}\}$, $B = \{x : x \text{ es una ave}\}$ *y* $C = \{x : x \text{ es un reptil}\}$, *entonces* $A \subseteq B$, *pero* $B \nsubseteq C$.
3. *Si* $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 7\}$, $B = \{2, 3, 7\}$ *y* $C = \{2, 3, 8\}$, *entonces* $B \subseteq A$, *pero* $B \nsubseteq C$.
4. *Si* $A = \{x : x \text{ es una golondrina}\}$, $B = \{x : x \text{ es una ave}\}$ *y* $C = \{x : x \text{ es un reptil}\}$, *entonces* $A \subseteq B$, *pero* $B \nsubseteq C$.

1.1.2. Operaciones con conjuntos

Al comparar dos conjuntos es conveniente pensar que ambos son subconjuntos de un mismo conjunto fijo, llamado **conjunto universal**.

Definición 1.1.6. *La unión de dos conjuntos A y B se define como el conjunto:*

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Las propiedades siguientes son consecuencia inmediata de la definición.

u_1) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$,

u_2) $A \cup B = B \cup A$ (conmutatividad)

u_2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociatividad).

En virtud de la última observación, *iii*), al denotar la unión de más de dos conjuntos, no es necesario escribir los paréntesis.

Definición 1.1.7. *La intersección de dos conjuntos A y B se define como el conjunto:*

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Como consecuencia inmediata tenemos que

i_1) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$,

i_2) $A \cap B = B \cap A$ (conmutatividad)

i_3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociatividad).

En analogía a la unión en inciso *iii*) nos dice que la intersección de más de dos conjuntos, no es necesario escribir los paréntesis.

Proposición 1.1.8 (Ley distributiva). *Sean A, B y C conjuntos, entonces se cumple*

d_1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

d_2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Dem.
Mostramos d_2) y dejamos d_1 como ejercicio.

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \text{ o } x \in B \cap C \\ &\iff x \in A \text{ o } \ (x \in B \text{ y } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ o } x \in B) \ \text{ y } \ (x \in A \text{ o } x \in C) \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\,. \end{aligned}$$

Q.E.D

Otra manera de demostrar igualdad de conjuntos y la más usada es probando por contenciones, es decir, mostrar que el primer conjunto esta contenido en el otro y viceversa.

Llamamos **conjunto universal** a un conjunto fijo que contiene a todos los conjuntos en discusión, en otras palabras, todos los conjuntos tratados son subconjuntos de este conjunto fijo y «más grande». Por ejemplo, cuando gráficamos sobre el plano cartesiano $\left(\mathbb{R}^2\right)$, dicho plano es el conjunto universal y todo dentro de el son subconjuntos, es decir, las rectas, parábolas, círculos, etcétera son subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.1.9. *Sea $\mathbb{U}$ un conjunto universal y $A \subset \mathbb{U}$. El **conjunto complemento** o simplemente **complemento** de A en $\mathbb{U}$ es el conjunto de elementos de $\mathbb{U}$ que no pertenencen a A, y lo denotamos por A^c, específicamente*

$$A^c = \{x \in \mathbb{U} : x \notin A\}.$$

Como primera observación tenemos que el complemento de un conjunto varía si el universal donde vive cambia, por ejemplo, el complemento de $A = 1, 2$ en $\mathbb{U}_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ es $\{-2, -1, 0\}$, pero en $\mathbb{U}_2 = \mathbb{N}$ es $\{3, 4, 5, \dots\}$.

Proposición 1.1.10. *Las siguientes propiedades se cumplen:*

1) $(A^c)^c = A$,

2) $A \cup A^c = \mathbb{U}$,

3) $A \cap A^c = \emptyset$,

4) $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$.

Dem.
Las propiedades 2) y 3) se siguen directamente de la definición. Mostremos que 1) se cumple:

$$\begin{aligned} x \in (A^c)^c &\iff x \in \mathbb{U} \text{ y } x \notin A^c \\ &\iff x \in \mathbb{U} \text{ y } \ (x \in \mathbb{U} \text{ y } x \in A) \\ &\iff x \in \mathbb{U} \text{ y } x \in A \qquad\qquad\qquad \iff x \in A. \end{aligned}$$

Q.E.D

1.2. Números reales

Los números reales son un conjunto fundamental en las matemáticas que abarca una amplia gama de valores numéricos utilizados para medir, contar y representar cantidades. Son un concepto fundamental en casi todas las ramas de las matemáticas, desde la aritmética básica hasta el análisis matemático avanzado.

1.2.1. Axiomas de campo

Con la suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ conocido de los números reales, enunciaremos las reglas del juego que gobiernan en este conjunto, es decir, las propiedades axiomáticas de los números reales.

Axiomas para la suma:

Cerradura: Para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a + b \in \mathbb{R}.$$

Asociatividad: Para $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Existencia del neutro: Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$0 + a = 0 = a + 0.$$

Cerradura bajo inversos: Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe $-a \in \mathbb{R}$ tal que,

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a.$$

Conmutatividad: Para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a + b = b + a.$$

Axiomas para el producto:

Cerradura: Para $a, b \in \mathbb{R}$,
$$ab \in \mathbb{R}.$$

Asociatividad: Para $a, b, c \in \mathbb{R}$,
$$a(bc) = (ab)c.$$

Existencia del neutro: Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,
$$1a = a = a1.$$

Cerradura bajo inversos: Para cada $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, existe $a^{-1} := \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ tal que,
$$a(a^{-1}) = 0 = (a^{-1})a.$$

Conmutatividad: Para $a, b \in \mathbb{R}$,
$$ab = ba.$$

Axiomas de distributividad:

Distributividad por la izquierda: Para $a, b, c \in \mathbb{R}$,
$$a(b + c) = ab + ac \in \mathbb{R}.$$

Distributividad por la derecha: Para $a, b, c \in \mathbb{R}$,
$$(a + b)c = ac + bc \in \mathbb{R}.$$

Los axiomas (las reglas del juego) mencionados previamente se cumplen en $\mathbb{R}$, pero no son exclusivos de ellos, más bien tiene que ver con el concepto de «campo»que no veremos aquí, pero no esta demás mencionarlo. Ahora, bien, también es importante recordar las relación de orden en los números reales:

Definición 1.2.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Denotaremos como $a \leq b$ cuando $b - a$ es un número real positivo o cero y diremos que a es menor o igual que b.*

Si queremos decir que b es más chico que a, entonces escribimos $b \leq a$ (o $a \geq b$), y queremos decir que no hay posibilidad que sean iguales, entonces, diremos que a es estrictamente menor a b si $a < b$ y $a \neq b$, similarmente, diremos que a es estrictamente mayor que b si $b < a$ (o $a > b$) y $a \neq b$. Propiedades de estas desigualdades:

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Si, $a \leq b$ ($a < b$), entonces $a + c \leq b + c$ ($a + c < b + c$).
- Si, $a \leq b$ ($a < b$), entonces $a - c \leq b - c$ ($a - c < b - c$).
- Si, $a \leq b$ ($a < b$), entonces $\frac{1}{c}a \leq \frac{1}{c}b$ ($\frac{1}{c}a < \frac{1}{c}b$) si $c \geq 0$.
- Si, $a \leq b$ ($a < b$), entonces $\frac{1}{c}a \geq \frac{1}{c}b$ ($\frac{1}{c}a > \frac{1}{c}b$) si $c < 0$.

Hay una propiedad de los números racionales sobre los reales y se llama **densidad** y básicamente lo que dices es que *entre cualquiera dos números reales existe un número racional.* Este resultado, tiene una gran importancia, pues entre esta esta que cualquier número irracional puede ser aproximado por una sucesión de racionales. El concepto de **sucesión** la veremos más adelante y solo será como mención.

1.3. Producto cartesiano

El producto cartesiano es uno de los conceptos importantes de la matemática, pues de este emanan conceptos como relación y función. Para tratarlo, es necesario el concepto de *par ordenado*.

Definición 1.3.1. *Un* ***par ordenado*** *de una pareja de objetos matemáticos «a», «b»es el conjunto* $\{\{a\},\{a,b\}\}$ *y lo denotamos como* (a,b).

En otras palabras, un par ordenado (a,b) hace la distinción de orden secuencial entre «a»y «b». Obsérvese que $(a,b) \neq (b,a)$, pues $\{\{a\},\{a,b\}\} \neq \{\{b\},\{b,a\}\}$ (siempre que $a \neq b$).

Proposición 1.3.2. *Dos pares ordenados* (a,b) *y* (c,d) *son iguales si y solo* $a = c$ *y* $b = d$.

Dem.
Dividiremos nuestra demostración en dos $\Rightarrow$) y $\Leftarrow$):

$\Rightarrow$) Supongamos que $(a,b) = (c,d)$. Entonces $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$, Así,

$$\{a\} = \bigcap\{\{a\},\{a,b\}\} = \bigcap\{\{c\},\{c,d\}\} = \{c\},$$

por lo que $a = c$. Por la misma igualdad inicial; $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ se sigue que

$$\{\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a,b\}\} - \{\{a\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} - \{\{c\}\} = \{\{c,d\}\}$$

Se tiene que $\{a,b\} = \{c,d\}$.Hay dos casos;

- $|\{a,b\}| = |\{c,d\}| = 1$, en este caso $a = b$ y $c = d$ y por transitividad se concluye que $b = d$.
- $|\{a,b\}| = |\{c,d\}| = 2$, en este caso, obtenemos

$$\{b\} = \{a,b\} - \{a\} = \{c,d\} - \{c\} = \{d\}$$

Por tanto, $b = d$. Se concluye que $(a,b) = (c,d)$.

$\Leftarrow$) Si $a = c$ y $b = d$, entonces $\{a\} = \{c\}$ y $\{a,b\} = \{c,d\}$, por lo que $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$. Por lo tanto, $(a,b) = (c,d)$.

Q.E.D

Definición 1.3.3. *Sean* A *y* B *conjuntos,* ***el producto cartesiano*** *de* A *y* B *es el conjunto denotado por* $A \times B$ *y consta de los pares ordenado* (a,b) *donde* $a \in A$ *y* $b \in B$*, es decir,*

$$A \times B := \{(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

■ **Ejemplos 1.3.4.** *Ilustremos el producto cartesiano con los siguientes ejemplos:*

- *Si* $A = \{1,2\}$ *y* $B = \{a,b\}$*, entonces el producto cartesiano* $A \times B$ *sería:*

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$$

- *Si* $A = \{1,2\}$ *y* $B = \{x,y,z\}$*. El producto cartesiano* $A \times B$ *es:*

$$A \times B = \{(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2,z)\}$$

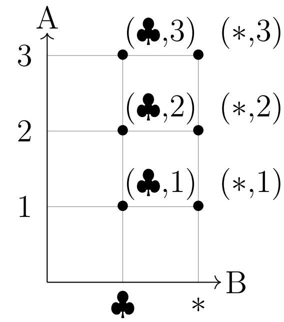
- *Si* $A = \mathbb{N}$ *y* $B = \mathbb{N}$*, entonces el producto* $A \times B$ *es* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *y se describe como sigue:*

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,m) : n,m \in \mathbb{N}\}.$$

- *Si consideramos los conjuntos* A *y* B *como los conjuntos de números reales* $\mathbb{R}$*, el producto cartesiano* $A \times B$ *se representa como* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *y que conocemos como* ***plano cartesiano*** *y es descrito como:*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Finalmente, un producto cartesiano, se puede representar de manera visual cuando los conjuntos involucrados lo permitan, por ejemplo si los conjuntos A y B son finitos, lo podemos representar de manera visual como una malla. Digamos que $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{\clubsuit, *\}$, podemos representarlo de manera visual como sigue:



En este caso, no hemos hablado de ningún tipo de orden, pero en el caso del plano cartesiano, cada eje representa la linea real y esta tiene un orden.

1.4. Relaciones

Definición 1.4.1. *Sean A y B conjuntos. Una relación R entre A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, es decir, $R \subseteq A \times B$.*

■ **Ejemplo 1.4.2.** *consideremos los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{x, y\}$, su producto cartesiano es;*

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}.$$

Veamos todos las relaciones entre A y B. Qué por definición es cualquier subconjunto de $A \times B$:

$$\begin{array}{ll}
R_1 = \emptyset & R_9 = \{(1, y), (2, x)\} \\
R_2 = \{(1, x)\} & R_{10} = \{(1, y), (2, y)\} \\
R_3 = \{(1, y)\} & R_{11} = \{(2, x), (2, y)\} \\
R_4 = \{(2, x)\} & R_{12} = \{(1, x), (1, y), (2, x)\} \\
R_5 = \{(2, y)\} & R_{13} = \{(1, x), (1, y), (2, y)\} \\
R_6 = \{(1, x), (1, y)\} & R_{14} = \{(1, x), (2, x), (2, y)\} \\
R_7 = \{(1, x), (2, x)\} & R_{15} = \{(1, y), (2, x), (2, y)\} \\
R_8 = \{(1, x), (2, y)\} & R_{16} = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}
\end{array}$$

Hemos dicho e ilustrado que una relación entre dos conjuntos A y B es cualquier subconjunto de $A \times B$, entonces el conjunto potencia de $A \times B$ colecciona todas las relaciones entre A y B. Al subconjunto $\emptyset$ se llama **relación vacía**. En general, para una relación $R \subseteq A \times B$ se usa la la nomenclatura aRb, para indicar que $(a, b) \in R$.

Definición 1.4.3. *El dominio de una relación $R \subseteq A \times B$ se define como:*

$$D(R) := \{a \in A : \text{ existe } b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R\}.$$

■ **Ejemplo 1.4.4.** *Veamos el dominio de cada relación del ejemplo 1.4.2.*

$$\begin{aligned} D(R_1) &= \emptyset & D(R_9) &= \{1,2\} \\ D(R_2) &= \{1\} & D(R_{10}) &= \{1,2\} \\ D(R_3) &= \{1\} & D(R_{11}) &= \{2\} \\ D(R_4) &= \{2\} & D(R_{12}) &= \{1,2\} \\ D(R_5) &= \{2\} & D(R_{13}) &= \{1,2\} \\ D(R_6) &= \{1\} & D(R_{14}) &= \{1,2\} \\ D(R_7) &= \{1,2\} & D(R_{15}) &= \{1,2\} \\ D(R_8) &= \{1,2\} & D(R_{16}) &= \{1,2\} \end{aligned}$$

Definición 1.4.5. *La imagen de una relación $R \subseteq A \times B$ se define como:*

$$Im(R) := \{b \in B : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } (a,b) \in R\}.$$

■ **Ejemplo 1.4.6.** *Veamos el dominio de cada relación del ejemplo 1.4.2.*

$$\begin{aligned} Im(R_1) &= \emptyset & Im(R_9) &= \{x,y\} \\ Im(R_2) &= \{x\} & Im(R_{10}) &= \{y\} \\ Im(R_3) &= \{y\} & Im(R_{11}) &= \{x,y\} \\ Im(R_4) &= \{x\} & Im(R_{12}) &= \{x,y\} \\ Im(R_5) &= \{y\} & Im(R_{13}) &= \{x,y\} \\ Im(R_6) &= \{x,y\} & Im(R_{14}) &= \{x,y\} \\ Im(R_7) &= \{x\} & Im(R_{15}) &= \{x,y\} \\ Im(R_8) &= \{x,y\} & Im(R_{16}) &= \{x,y\} \end{aligned}$$

El **codominio** de $R \subseteq A \times B$ es B. Obsérvese que en general $Im(R) \subseteq B$.

1.5. Funciones

Las funciones son una subclase de las relaciones. Es un caso especial y que podríamos decir que es de los objetos que más usamos en ciencias básicas e ingeniería.

Definición 1.5.1. *Sean A y B conjuntos y $R \subseteq A \times B$. R es una* ***función*** *si cumple:*

(1) $D(R) = A$,

(2) *Si* $(a, y_1), (a, y_2) \in R$, *entonces* $y_1 = y_2$.

La primera condición de la definición 1.5.1 nos dice que

$$\forall x \in A, \exists y \in B \ni (x,y) \in R.$$

Para darle lectura a esto, es necesario saber el significado de cada símbolo; $\forall$ significa «**para todo**», $\exists$ significa «**existe**»y $\ni$ significa «**tal que**». Por lo que, el enunciado matemático previo se lee: «Para todo x en A, existe y en B tal que (x,y) es elemento de R». En otras palabras, cada elemento de A debe estar emparejado con algún elemento de B. La segunda condición no dice este emparejamiento debe ser único, es decir, que cada elemento de A esta emparejado con un único elemento de B. De modo que en una función R, si $(a,b) \in R$, entonces b queda totalmente determinado por a y por ello en lugar de de b colocamos $R(a)$ y se suele llamar **la imagen de «a»bajo** R, y también conocemos esta asociación como **Regla de correspondencia**. Por lo general, denotamos una función partiendo de la letra f que es la inicial de función. Ahora, por todo lo mencionado es común denotar la pareja $a \mapsto f(a)$, para indicar la pareja $(a, f(a))$, y aunando a ello, es conveniente usar la notación $f : A \longrightarrow B$ (a veces se usa $A \xrightarrow{f} B$)para denotar la función f, que nos indica que cada elemento de A esta asociado a un elemento de B. El dominio y codominio de f son exactamente el dominio y codominio como relación.

■ **Ejemplos 1.5.2.** *Ilustremos el concepto de función con los siguientes ejemplos:*

- *Retomando el ejemplo 1.4.2 con $A = \{1, 2\}$, y $B = \{x, y\}$. Considerando el ejemplo 1.4.6 y el primer inciso de la definición de función, se sigue que los únicos candidatos a función son $R_7, R_8, R_9.R_{10}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}$. Y por el inciso 2 vemos que R_7, R_8, R_9, R_{10} son funciones, pero $R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}$ no lo son, pues por ejemplo R_{12} tiene como elementos a $(1, x)$ y $(1, y)$, pero x se supone distinto de y, por lo que no cumple la segunda condición para ser función, el resto tienen elementos similares.*
- *Para A es un conjunto no vació. La relación $\mathrm{id}_A : A \longrightarrow A$ con regla de correspondencia dada por $\mathrm{id}_A(x) = x$, es una función y es llamada **función identidad**.*

Si bien una función es una relación y una relación es un subconjunto de un producto cartesiano, entonces la igualdad de funciones se reduce a la igualdad de conjuntos. Sin embargo, puede haber métodos más prácticos o manejables para determinar si una función es igual a otra.

Proposición 1.5.3. *Sean A, B, C, D conjuntos y $f \subseteq A \times B$, $g \subseteq C \times D$ funciones. Entonces, $f = g$ si y solo si*

(*a*) $A = C$,

(*b*) $B = D$ *(este es más por la arbitrariedad de la imagen de una función),*

(*c*) $f(a) = g(x)$, $\forall x \in A$.

Dem.
Dividiremos nuestra demostración en dos $\Rightarrow$) y $\Leftarrow$):

$\Leftarrow$) Supongamos que se cumplen:

(*a*) $A = C$,
(*b*) $B = D$,
(*c*) $f(a) = g(x)$, $\forall x \in A$.

Si $(x, f(x)) \in f$, entonces como $x \in A = C$ y $f(x) = g(x)$, se sigue que $(x, f(x)) \in g$, es decir, $f \subseteq g$. Probar que $g \subseteq f$ es totalmente análogo, por lo tanto, $f = g$.

$\Rightarrow$) Supongamos que $f = g$, entonces $A = D(f) = D(g) = C$ y $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$. Además, $\mathrm{Im}(f) \subseteq B$ y $\mathrm{Im}(g) \subseteq D$ y considerando el hecho de que dichas imágenes pueden cubrir totalmente el codominio, es natural exigir que $B = D$, finalmente veamos que se cumple (*c*): sea $x \in A = C$,entonces $(x, g(x)) \in g$ y $(x, f(x)) \in f$, pero como $f = g$, se sigue que $(x, g(x)), (x, f(x)) \in f$, y por ser f función, se concluye que $f(x) = g(x)$.

Q.E.D

La proposición previa 1.5.3 nos permite reformular el concepto de función como: Una función f consta de un conjunto A llamados dominio, un conjunto B llamado codominio y una regla de correspondencia $f : A \longrightarrow B$ que a cada elemento del conjunto A le asocia uno y sólo un elemento de B.

Recordemos que si $f \subseteq A \times B$ es una función, entonces

$$\mathrm{Im}(f) = \{b \in B : \text{ existe } a \in A, \text{ tal que } (a, b) \in f\}$$

pero como f es función, entonces $b = f(a)$, por lo tanto, podemos reescribir este concepto como sigue:

$$\mathrm{Im}(f) = \{b \in B : \text{ existe } a \in A, \text{ tal que } f(a) = b\}$$

.

Definición 1.5.4. *Si $f : A \longrightarrow B$ es una función, entonces su gráfica se define como:*

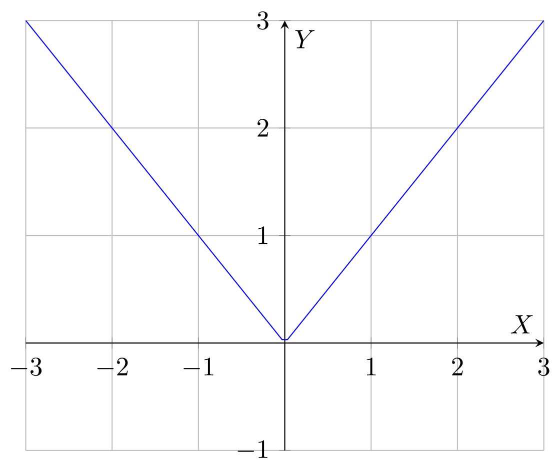
$$G_f := \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Para visualizarlo, lo único que debemos hacer es ubicar esos puntos sobre el producto cartesiano en la que emana dicha función. Por ejemplo, sobre el producto cartesiano.

■ **Ejemplos 1.5.5.** *Consideremos la siguiente función $|\square| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$|x| := \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}$$

*Es decir, lo que es positivo lo deja igual y lo que es negativo lo hace positivo, esta función recibe el nombre de **valor absoluto** (esta función es muy importante). Veamos su gráfica:*



En este curso de cálculo diferencial, no reduciremos a funciones cuyo dominio es un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Muchas funciones en matemáticas se construyen a partir de funciones de «bloques de construcción»más simples. En la próxima sección estudiaremos funciones muy comunes, para posteriormente considerar algunas formar en que se pueden combinar para obtener nuevas funciones, como lo son las siguientes.

Proposición 1.5.6. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones. Las siguientes son funciones:*

- $A \ni x \xmapsto{f+g} f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$,
- $A \ni x \xmapsto{f-g} f(x) - g(x) \in \mathbb{R}$,
- $A \ni x \xmapsto{fg} f(x)g(x) \in \mathbb{R}$,
- $A \ni x \xmapsto{\frac{f}{g}} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$ *siempre que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$.*

Las anteriores son formas de obtener nuevas funciones, aunque no son las únicas si que son muy importantes.

1.6. Funciones elementales

Muchas situaciones reales pueden representarse mediante modelos matemáticos que se construyen a partir de tres tipos de funciones elementales. Estas funciones son:

- Funciones algebraicas (polinomios, funciones racionales, radicación)
- Funciones exponenciales
- Funciones trigonométricas

1.6.1. Funciones algebraicas

La palabra "variable" se utiliza en matemáticas para representar elementos que pueden cambiar o adoptar diferentes valores. En un contexto matemático, una variable es un símbolo utilizado para representar una cantidad desconocida o que puede variar en una determinada situación o problema. La introducción de variables permite expresar relaciones y ecuaciones en términos generales.

Definición 1.6.1. *Sean $x_1, \ldots, x_k$variables. Un* ***monomio*** *es un productos de potencias de las $x_i's$ con* ***coeficiente*** *un número real, es decir, es de la forma*

$$cx_1^{n_1} \cdots x_n^{n_k} \text{ donde } c \in \mathbb{R} \text{ y } n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}.$$

El ***grado de un monomio*** *se define como la suma de sus potencias, esto es, $gr(cx_1^{n_1} \cdot x_n^{n_k}) = n_1 + \cdots + n_k$.*

Un polinomio en varias variables $x_1, \ldots, x_n$ es una suma de monomios. Y el grado del polinomio se define como el grado más alto de us monomios.

Definición 1.6.2. *Un polinomio de grado n con k variables $x_1, \ldots, x_k$ se escribe como:*

$$p(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{n_1 + \cdots + n_k \leq n} a_{n_1, \ldots, n_k} x^{n_1} \ldots x^{n_k}.$$

Donde los $a_{n_1, \ldots, n_k} \in \mathbb{R}$.

En el caso de tener una sola variable o dos, es común usar únicamente x y x, y, respectivamente, aunque claro se puede usar cualquier letra para representar las variables correspondientes.

Polinomio de una variable x:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Polinomio de dos variables variable x, y:

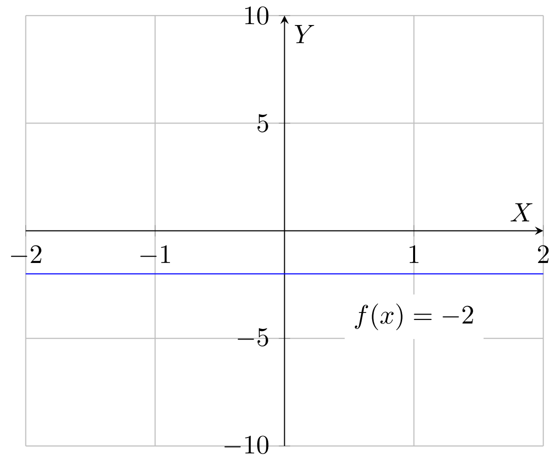
$$p(x, y) = a_{n,0} x^n + a_{n-1,1} x^{n-1} y + + a_{n-2,2} x^{n-1} y^2 \cdots + a_{0,0}.$$

Nos dedicaremos mayormente al estudio de los polinomios de una variable. Veamos los ejemplos más comunes:

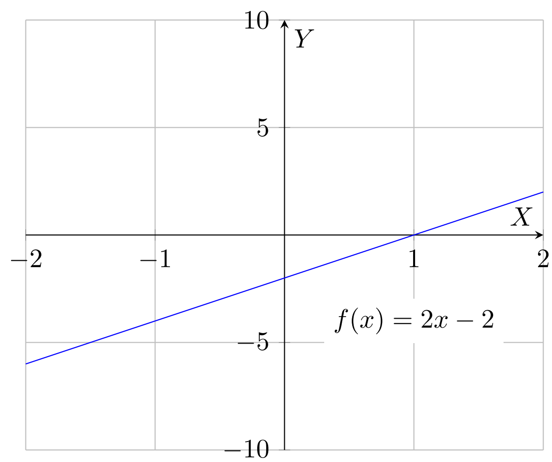
Grado cero	a	**función contante**
Primer grado	$ax + b$	**función lineal**
Segundo grado	$ax^2 + bx + c$	**función cuadrarica**
Tercer grado	$ax^2 + bx^2 + cx + d$	**función cubica**

No tenemos aún mucha herramienta para graficarlas, pero podemos darnos una idea de como son si empezamos a darle valores a x, es decir, realizar el método de tabulación. Veamos unos ejemplos de gráficas.

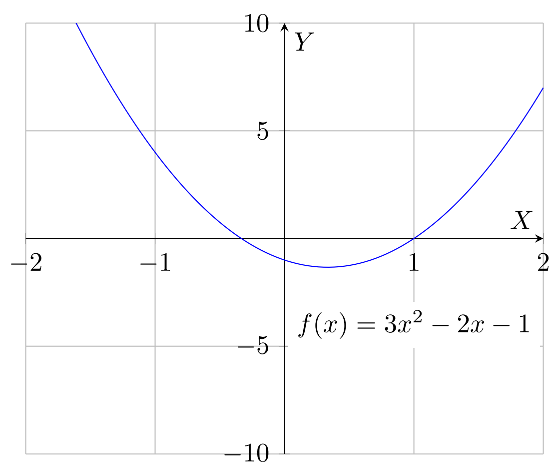
De manera formal, si A y B son conjuntos no vacíos, entonces una función constante se define como sigue: sea $a \in A$ fijo y $f : A \Longrightarrow B$ dada por $f(x) = a$ para todo $x \in A$. Si pensamos en algo mucho más concreto como que $A \subseteq \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ y $a = 2$, entonces la gráfica se ve como sigue:



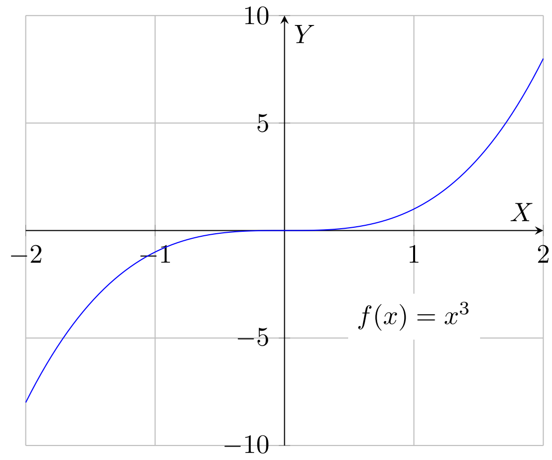
De manera similar, para el caso de función lineal, si $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $a = 2$ y $b = 1$, entonces la regla de correspondencia es $f(x) = 2x - 2$ y si gráfica se ve como sigue:



Para la función cuadrática, sea $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $a = 3, b = -2, c = -1$, entonces la regla de correspondencia es $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ y si gráfica se ve como sigue:



Finalmente, para la función cubica. Sea $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ y $a = 1, b = c = d = 0$, entonces la regla de correspondencia es $f(x) = x^3$ y si gráfica se ve como sigue:



Sean $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ polinomios, entonces podemos realizar, suma, resta, producto de esto como sigue (considerar que $x^0 := 1$):

- **Suma de polinomios:**

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i.$$

- **Resta de polinomios:**

$$p(x) - q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i)x^i.$$

- **Producto de polinomios:**

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i, \text{, donde } c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}.$$

■ **Ejemplo 1.6.3.** *Sea $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ y $Q(x) = 4x^2 + 2x - 1$ polinomios.*

- ***Suma:***

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (2x^3 - x^2 + 3x + 1) + (4x^2 + 2x - 1) \\ &= 2x^3 + 3x^2 + 5x \end{aligned}$$

- ***Resta:***

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (2x^3 - x^2 + 3x + 1) - (4x^2 + 2x - 1) \\ &= 2x^3 - 5x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

- ***Producto:***

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x^3 - x^2 + 3x + 1) \cdot (4x^2 + 2x - 1) \\ &= 8x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 12x^3 + 6x^2 - 3x + 4x^2 + 2x - 1. \\ &= 8x^5 + 8x^3 + 11x^2 - x - 1. \end{aligned}$$

Claramente, podremos hablar de suma, resta y producto de polinomios en varias variables, pero la notación se complica un poco más. Por otro lado, nos falta introducir el cociente entre polinomios, más sin embargo, para esto, es necesario introducir en concepto de **función racional**.

Definición 1.6.4. *Una **función racional** de varias variables $f(x_1,\dots,x_n)$ se define como el cociente de dos polinomios, es decir, es de la forma:*

$$f(x_1,\dots,x_n)=\frac{p(x_1,\dots,x_n)}{q(x_1,\dots,x_n)}.$$

En particular, una función racional en una variable se ve como $\frac{p(x)}{q(x)}$. Es importante mencionar que el dominio de una función racional excluye todos los valores de la variable para los cuales el denominador es cero.

■ **Ejemplo 1.6.5.** *Si $p(x)=x-3$ y $q(x)=x+5$, entonces $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$ tiene como dominio a $\mathbb{R}-\{-5\}$.*

Usando el ejemplo previo y con unos cuantos cálculos, podemos mostrar que $\frac{x-3}{x+5}$ es igual a $1-\frac{8}{x+5}$. Y esto tiene que ver con el concepto de **división de polinomios** y además del algoritmo que usamos para realizarlo.

Teorema 1.6.6. *Sean $u(x)$ y $v(x)$ polinomios con $gr(u(x))\geq gr(v(x))$ y $v(x)\neq 0$. Entonces, existen $q(x),r(x)$ polinomios tales que*

$$u(x)=q(x)v(x)+r(x).$$

Donde $gr(r(x))<gr(v(x))$.

A los elementos $u(x),v(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ se les llama **dividendo, divisor, cociente y residuo**, respectivamente. Para encontrar los polinomios $q(x)$ y $r(x)$ se implementa un algoritmo llamado **algoritmo de la división** que emana de la demostración del teorema previo.

■ **Ejemplo 1.6.7.** *Dividir $3x^2+x-1$ por $x+1$*

$$\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & +x & -1 & x+1 \\ \cline{4-4}
-3x^2 & -3x & & 3x-2 \\ \cline{1-2}
 & -2x & -1 & \\
 & 2x & +2 & \\ \cline{2-3}
 & & 1 &
\end{array}$$

Los polinomios más simples no triviales son los lineales, es decir, de la forma $x-\alpha$. ¿Como se ve un polinomio al dividirlo por uno de estos?

Teorema 1.6.8 (Teorema del resto)**.** *Sea $p(x)$ un polinomio de grado $n\geq 1$ y $\alpha\in\mathbb{R}$. Entonces, existen $q(x)$ polinomio y $R\in\mathbb{R}$ tales que*

$$p(x)=(x-\alpha)q(x)+R$$

, donde R es constante. Además, $p(\alpha)=R$.

Dem.
Por el algoritmo de la división, se sigue que existen $q(x),r(x)$ polinomios con $gr(r(x))<gr(x-\alpha)=1$ tales que

$$p(x)=(x-\alpha)q(x)+r(x),$$

y como $gr(r(x))<1$ se sigue que $gr(r(x))=0$, es decir, $r(x)=R\in\mathbb{R}$. Esto prueba lo deseado.

Q.E.D

El teorema del resto también lo podemos representar como:

$$\frac{p(x)}{x-\alpha}=q(x)+\frac{R}{x-\alpha}.$$

En el ejemplo previo, podemos observar que $3x^2+x-1=(x+1)(3x-2)+1$, en este caso,$\alpha=-1$, $3x-2=q(x)$ y $R=1$. Un caso especial es cuando $R=0$ y tiene un nombre especial.

Definición 1.6.9. *Sea $p(x)$ un polinomio y $\alpha \in \mathbb{R}$.*

- *α es un* ***cero*** *de $p(x)$ si $p(\alpha) = 0$.*
- *α es una* ***raíz de la ecuación*** *$p(x) = 0$ si es solución de la misma.*
- *$x - \alpha$ es un factor de $p(x)$ si existe un polinomio $q(x)$ tal que $p(x) = (x - \alpha)q(x)$.*

Obsérvese que estos conceptos van muy bien de la mano, pero es importante distinguir cada termino, pues hacen referencia a diferentes situaciones.

■ **Ejemplo 1.6.10.** *Consideremos el polinomio como antes $p(x) = x^2 - 5x + 6$, entonces*

- *$x = 2$ es un cero de $p(x)$, pues $p(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 0$.*
- *$x = 2$ es un raíz de la ecuación $p(x) = 0$.*
- *$x - 2$ es un factor de $p(x)$, pues $p(x) = (x - 2)(x - 3)$.*

Teorema 1.6.11 (Teorema del factor)**.** *Sea $p(x)$ un polinomio. Si $p(\alpha) = 0$, entonces $x - \alpha$ es un factor de $p(x)$.*

Una pregunta natural es, ¿se puede dividir cualquier polinomio en factores lineales? La respuesta es afirmativa.

Teorema 1.6.12 (Teorema Fundamental del Álgerba)**.** *Si p(x) es un polinomio de grado n con coeficientes reales (o complejos), entonces existe $c, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que*

$$p(x) = c\prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i).$$

Donde los α_i's pueden ser los mismos.

Entonces la incógnita principal es, ¿como encontramos esos α_i's? esta respuesta no es sencilla de responder. Al proceso de búsqueda de esos factores lleva como nombre **factorización**. Aunque se supone que el alumno ya posea algunas técnicas de factorización obtenidas en su formación pre-universitaria, no esta de más recordar algunos.

El siguiente resultado, es el origen de el proceso de factorización llamado **división sintética**.

Teorema 1.6.13 (Teorema de Gauss)**.** *Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbb{Z}$ con $i \in \{0, \ldots, n\}$. Si $p(x)$ tiene un cero racional, entonces este cero debe ser de la forma $\frac{p}{q}$ reducida$\mathrm{mcd}(p, q) = 1$, donde $p|a_0$, $q|a_n$.*

■ **Ejemplo 1.6.14.** *Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$. Encontremos una raíz racional (si la tiene), como el coeficiente de la mayor potencia es 1, entonces las raíces deben ser enteras.*

Los divisores enteros de 6 son $-1, -2, -3, -6, 1, 2, 3, 6$, así que estos son los posibles candidatos a ser ceros de $p(x)$. Evaluemos a todos para ver cual da cero.

$$\begin{array}{cccc} p(1) = -6 & p(2) = 4 & p(3) = 30 & p(6) = 264 \\ p(-1) = -1 & p(-2) = 0 & p(-3) = -6 & p(-6) = -132 \end{array}$$

Por lo tanto, $x = -2$ es una raíz de $p(x)$. Y de hecho, se puede ver como $p(x) = (x + 2)(x^2 - 3)$.

Finalicemos esta sección, con el estudio particular de los polinomios del tipo ax^2+bx+c con $a \neq 0$, es decir, los polinomios de grados 2. Obsérvese que $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$, esto nos permite observar que un cero de ax^2+bx+c es un cero de $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ y viceversa, por lo que podemos centrar nuestro estudio en los polinomios de la forma x^2+bx+c (abusando de la notación).

Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que este polinomio tiene dos factores lineales, digamos $x+\alpha$ y $x+\beta$, esto es, $x^2+bx+c=(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$, en otras palabras, $b=\alpha+\beta$ y $\alpha\beta=c$, es decir, para factorizar, debemos fijarnos en los divisores de c, escoger dos que sumado nos de b.

Otra manera de factorizar un polinomio es conociendo los productos notables, en listaré algunos de ellos:

- Cuadrado de la suma:
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
- Diferencia de cuadrados:
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
- Cubo de un binomio:
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
- Cuadrado de la diferencia:
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
- Diferencia de cubos:
$$(a-b)(a^2+ab+b=2)=a^3-b^3$$
- Suma de cubos:
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
- Suma de potencias n-ésimas solo si n es impar:
$$(a+b)\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a^{(n-1)-i}b^i\right)=a^n+b^n$$
- Resta de potencias n-ésimas:
$$(a-b)\left(\sum_{i=0}^{n-1}a^{(n-1)-i}b^i\right)=a^n-b^n$$

El uso de estos productos dependerá de cada individuo, pero básicamente consiste en ver la forma en algún problema en particular.

1.6.2. Funciones exponenciales

La subsección anterior nos dio un panorama amplio de funciones como $\mathbb{R} \ni x \overset{f}{\mapsto} x^2 \in \mathbb{R}$. Intercambiando x y 2 producimos una función diferente $\mathbb{R} \ni x \overset{f}{\mapsto} 2^x \in \mathbb{R}$. Esta nueva función presenta una marcada disparidad con una función potencial y cuenta con numerosas propiedades distintivas. Se llama una *función exponencial.*

Definición 1.6.15. *Sea $a \in \mathbb{R}$ positivo y $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$. A la función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$ se llama* ***función exponencial*** *con base a.*

Si bien, debe darse por sentado el conocimiento de las leyes de los exponentes, este apartado le daremos un pequeño repaso. Recuerde que en una expresión como a^n en el cual a es elevado a la potencia n, el número a es llamado la **base** y n el exponente.

Repaso de los exponentes. Vamos a empezar. Para un número $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}_0$,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces}}.$$

Esto sería demasiado elemental para mencionarlo, excepto que todas las propiedades significativas de los exponentes se derivan de él.

En listemos todas las leyes de los exponentes más usadas y cuyo prueba se realiza considerando la definición previa y tomando las siguientes consideraciones $a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = 1$, $a^{-n} := (a^{-1})^n$ y $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Consideremos $a > 0$ y $n, m \in \mathbb{Z}$:

- $a^1 = 1$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $(a^n)^m = a^{mn}$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Note que 0^0 no esta definido(no se puede).

¿Qué hay de las potencias con fracciones, como $a^{\frac{1}{n}}$? Para explicar eso, es importante recordar que el actual símbolo de la raíz cuadrada ($\sqrt{\ }$) fue introducido en 1525 por el matemático *Christoph Rudolff* para representar la operación que consiste en que cada número real x se le asocia el único número no negativo y que elevado al cuadrado es igual a x, es decir, consiste en hallar el número y del que se conoce su cuadrado $y^2 = x$. El signo no es más que una forma estilizada de la letra r minúscula para hacerla más elegante alargándola con un trazo horizontal, hasta adoptar el aspecto actual, que representa la palabra latina radix, que significa raíz.

¿Por qué decimos que $(\sqrt{x}) = x^{1/2}$? Esto tiene que ver con la preservación de las leyes de los exponentes, si pensamos en que se cumplen dichas leyes. Tendremos lo siguiente; $x = x^{(\frac{1}{2})2} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2$. Así, se puede definir $\sqrt{x} := x^{1/2}$. Similarmente, para la raíz n-ésima, esto es $\sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}}$. Lo mejor de esto, es que se siguen cumpliendo las leyes de los exponentes antes mencionados y todos los que existan.

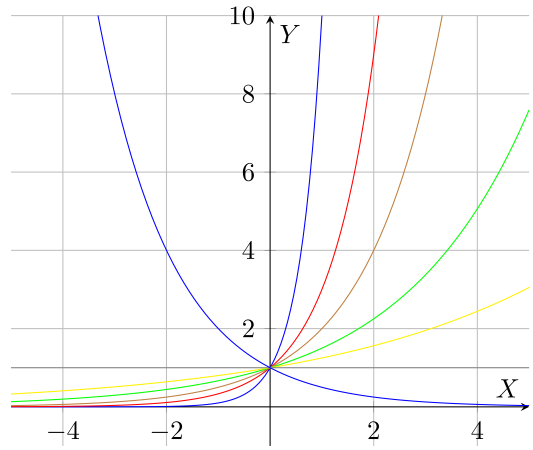
Por otro lado, ¿podemos hablar de potencias con números irracionales? Es decir,¿se puede escribir definir algo como 2^π? La respuesta es afirmativa, pero es necesario la introducción de limites, además de tener conocimiento de la densidad de los racionales sobre los reales. Por ello, en caso de usarlo, daremos por hecho de que dichos exponentes pueden existir. Y si desean profundizar en el tema, cuando se tenga la herramienta podrán intentar definirlo. Lo pondré aquí, pero no se pretende que se entienda hasta este momento:

Definición 1.6.16. *Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{I}$. Se define, x^α como:*

$$a^\alpha = \lim_{n \to \infty} x^{\frac{p_n}{q_n}}$$

donde $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$.

Sin más preámbulo, veamos como se ven las gráficas de algunas de funciones exponenciales:



En la figura previa, se puede observar que cada función exponencial, intersectar al eje Y en en $x = 0$, es decir, $f(0) = 1$. Además se puede observar que si la base a es mayor que 1, es decir, $a > 1$, entonces la función crece y si $0 < a < 1$, entonces la función decrece.

1.6.3. Funciones trigonométricas

1.6.4. Funciones hiperbólicas

1.7. Composición de funciones

Si el codominio de una relación coincide con el dominio de otra relación entonces se puede construir una nueva relación

Definición 1.7.1. *Sean A, B, C conjuntos, $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$. La relación R **compuesta con (o seguida de)** S es la relación denotada y definida como sigue:*

$$S \circ R; = \{(a, c) : \text{ existe } b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S\}.$$

Observe que el orden es muy importante. Esa es la definición general para una relación, pero en el caso especial de función, queda como sigue (una vez simplificando lo que se requiera simplificar como: la notación, etc.):

Definición 1.7.2 (Composición de funciones)**.** *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones. La función f **compuesta con (o seguida de)** g es la función con dominio A, codominio C y regla de correspondencia*

$$x \mapsto= g(f(x)), \textbf{ para todo } x \in A.$$

Y es denotado por $g \circ f$, es decir, $g \circ f : A \longrightarrow C$ dado por $g \circ f(x) = g(f(x))$.

■ **Ejemplos 1.7.3.** *Veamos los siguientes casos:*

- *Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^3 + 1$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $g(x) = x + 1$, entonces las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ están dadas por:*
  - $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^3 + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$
  - $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^3 + 1) = (x^3 + 1) + 1 = x^3 + 2$

  Este ejemplo muestras que la composición no es «conmutativa».

- *Si A y B son dos conjuntos y $f : A \longrightarrow B$ una función, entonces*

$$f \circ \mathrm{id}_A = f \text{ y } \mathrm{id}_B \circ g = g$$

Proposición 1.7.4. *Sean $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$ funciones, entonces*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Es decir, la composición es asociativa, por lo que podemos hacer caso omiso a los paréntesis.

Dem.
Ambas composiciones tienen el mismo codominio A y codominio D, por lo que para probar la igualdad basta con verificar la regla de correspondencia, por ello, sea $x \in A$.

$$h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h\left[g(f(x))\right]$$

Y

$$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h\left[g(f(x))\right].$$

Esto prueba lo deseado.

Q.E.D

Definición 1.7.5. *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función.*

- *Si existe una función $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$, entonces a g se le llama inversa izquierda de f.*
- *Si existe una función $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$, entonces a g se le llama inversa derecha de f.*

Para dar un ejemplo usaré las siguientes funciones:

Definición 1.7.6. *En $\mathbb{Z}$.*

- ***La función techo*** *esta definida como $\lceil\ \rceil : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ y dado por $\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$*
- ***La función piso*** *esta definida como $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ y dado por $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$*
- ***La función entero*** *esta definida como $[\ ] : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ y dado por*

$$[x] = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & si\ x \geq 0 \\ \lceil x \rceil & si\ x < 0 \end{cases}$$

■ **Ejemplo 1.7.7.** *Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(z) = 2z$ y $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $g(z) = [\frac{z}{2}]$, veamos quienes son $f \circ g$ y $g \circ f$:*

$$f \circ g(z) = f\left(\left[\frac{z}{2}\right]\right) = 2\left[\frac{z}{2}\right].$$

Si $z = 3$, entonces $\frac{3}{2} = 1.5$ y $[1.5] = 1$, por lo que $f \circ g(3) = 2$. Es decir, f no es inversa izquierda de g y g no es inversa derecha de f. Sin embargo,

$$g \circ f(z) = g(2z) = \left[\frac{2z}{2}\right] = [z] = z = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}(z).$$

Por lo que, f es inversa izquierda de g y g es inversa derecha de f.

Cabe resaltar que este ejemplo 1.7.7 muestra que es posible tener inversas izquierdas o derechas sin que necesariamente sean ambas al mismo tiempo.

Definición 1.7.8. *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Cuando existe $g : B \longrightarrow A$ función tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ y $g \circ f = \mathrm{id}_A$, decimos que f es invertible y que g es su inversa.*

■ **Ejemplo 1.7.9.** *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{1}{2x}$. Es facil, mostrar que se cumple lo deseado.*

Teorema 1.7.10. *Sea $f : A \longrightarrow B$ Una función. Si $g_1, g_2 : B \longrightarrow A$ funciones tal que g_1 es inversa izquierda y g_2 es inversa derecha de f, entonces $g_1 = g_2$, es decir, f es invertible.*

Dem.
Por definición de inversa izquierda y derecha, tenemos que: $g_1 \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g_2 = \mathrm{id}_B$. Así,

$$g_1 = g_1 \circ \mathrm{id}_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathrm{id}_A \circ g_2 = g_2.$$

Por lo tanto, f es invertible.

Q.E.D

Corolario 1.7.11. *Si $f : A \longrightarrow B$ es invertible, entonces su inverso $g : B \longrightarrow A$ es único.*

1.8. Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

Definición 1.8.1. *Una función $f : A \Longrightarrow B$ se llama **inyectiva** si para todo $x_1, x_2 \in A$, tales que $x_1 \neq x_2$, se tiene $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

■ **Ejemplos 1.8.2.** *Veamos unos ejemplos:*

- $\mathbb{R} \ni x \overset{f}{\mapsto} f(x) = x + 1 \in \mathbb{R}$, *es inyectiva.*
- $\mathbb{Z} \ni x \overset{g}{\mapsto} g(z) = 3z \in \mathbb{Z}$, *es inyectiva.*
- $\mathbb{R} \ni x \overset{h}{\mapsto} h(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ *NO es inyectiva, pues* $f(1) = 1 = f(-1)$ *y* $1 \neq -1$.

Tomamos las proposiciones $P : x_1, x_2 \in A$, con $x_1 \neq x_2$ y $Q : f(x_1) \neq f(x_2)$, entonces probar que f es inyectiva, es mostrar que $P \Rightarrow Q$, o similarmente $\neg Q \Rightarrow \neg P$, es decir, Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$, cualquiera de estas se puede usar para probar lo deseado, sin embargo, la última es la más usada.

■ **Ejemplo 1.8.3.** *Veamos que $f : \mathbb{R} \longleftarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 3$ es inyectiva. Supongamos que $f(x) = f(y)$, es decir, $2x + 3 = 2y + 3$, así*

$$2x + 3 - 3 = 2y + 3 - 3 \Rightarrow \frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(2y) \Rightarrow x = y.$$

Definición 1.8.4. *Una función $f : A \longrightarrow B$ se llama **sobreyectiva (o sobre)** si para todo $y \in B$, existe $x \in A$, tal que $f(x) = y$.*

■ **Ejemplo 1.8.5.** *Retomando los ejemplos 1.8.2 tenemos:*

- *f es sobre, pues para $y \in \mathbb{R}$ arbitrario, $f(y - 1) = (y - 1) + 1 = y$.*
- *g no es sobre, pues $1 \in \mathbb{Z}$, pero no existe entero z tal que $3z = 1$.*
- *h no es sobre, pues no existe real x tal que $x^2 = -1$.*

Definición 1.8.6. *Una función $f : A \longrightarrow B$ se llama **biyectiva** si es inyectiva y sobre.*

Por lo que en nuestros ejemplos 1.8.2 se tiene que f es biyectiva.

Teorema 1.8.7. *Una función $f : A \longrightarrow B$ es biyectivas si y sólo si es invertible.*

Dem.
Si f es biyectiva, se define $g : B \longrightarrow A$ de la manera obvia: para cada $b \in B$ por sobreyectividad existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$ y por inyectividad a es único, así, se define $g(b) = a$. Entonces,

$$f \circ g(b) = f(g(b)) = f(a) = b \text{ y } g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = a.$$

Es decir, $f \circ g = \mathrm{id}_B$ y $g \circ f = \mathrm{id}_A$, por lo tanto, f es invertible. Ahora, mostremos la veracidad del reciproco, supongamos que f es invertible, entonces existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ y $g \circ f = \mathrm{id}_A$, veamos que f es inyectiva y sobre:

- Supongamos que $f(a_1) = f(a_2)$, entonces $a_1 = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = a_2$, es decir, f es inyectiva.
- Sea $b \in B$. Tomamos $a = g(b)$, se sigue que $f(a) = f(g(b)) = b$, Es decir, f es sobre.

Por lo tanto, f es biyectiva.

Q.E.D

Proposición 1.8.8. *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones.*

(1) *Si f, g son inyectivas, entonces $g \circ f : A \longrightarrow C$ es inyectiva.*

(2) *Si f, g son sobre, entonces $g \circ f : A \longrightarrow C$ es sobre.*

Dem.
Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones.

(1) Supongamos que f, g son inyectivas y sean $a_1, a_2 \in A$ tal que $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$, entonces $g\left(f(a_1)\right) = g\left(f(a_2)\right)$. Por inyectividad de g, tenemos que $f(a_1) = f(a_2)$ y por los la inyectividad de f se sigue que $a_1 = a_2$. Por lo tanto, $g \circ f$ es inyectiva.

(2) Supongamos que f, g son sobres y sea $c \in C$. Dado que g es sobre, se sigue que existe $b \in B$ tal que $g(b) = C$ y por ser f sobre, se sigue que existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Así, $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Por lo tanto, $g \circ f$ es sobre.

Q.E.D

Bibliografía

[1] M. Fernández, L. M. Villegas (2014). *Lógica Matemática I: lógica proposicional, intuicionista y modal.* Primera reimpresión, UAMI.

[2] S. Hedman. (2004). *A first course in logic.* Oxford University Press.

[3] G. Metakides, A. Nerode (1996).*Principles of Logic and Logic Progamming.* Elsevier, Amsterdam.