Casa abierta al tiempo
Unidad Iztapalapa

Universidad Autónoma Metropolitana

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Módulos de Cocientes sobre Filtros de Continuidad

TESIS QUE PRESENTA:

M. en C. Juan Carlos Cruz González

ASESOR:

Dr. Rogelio Fernández-Alonso González

Septiembre 2023 CDMX, México

Índice general

Introducción **1**

1 Preliminares **5**
1.1 Teoría de Categorías . . . 5
1.1.1 Categorías . . . 5
1.1.2 Funtores . . . 7
1.1.3 Transformaciones naturales . . . 8
1.2 Anillos . . . 11
1.3 Módulos . . . 14
1.3.1 Teoría de Módulos . . . 14
1.3.2 Producto Tensorial . . . 17
1.3.3 Límite Directo . . . 20

2 Teorías de torsión y prerradicales **22**
2.1 Prerradicales y teorías de torsión . . . 22
2.2 Filtros lineales y filtros de Gabriel . . . 26

3 Módulos de cocientes sobre filtros de Gabriel **27**
3.1 Anillo de fracciones . . . 27
3.1.1 Campo de fracciones de $\mathbb{Z}$ . . . 27
3.1.2 Anillos de fracciones sobre anillos conmutativos . . . 28
3.1.3 Anillos de fracciones sobre anillos no conmutativos . . . 32
3.2 Módulos de fracciones . . . 42
3.3 Módulos de cocientes sobre filtros de Gabriel . . . 48

4 Módulos de cocientes sobre filtros de continuidad **65**
4.1 Filtros de continuidad . . . 65
4.2 Filtros lineales, de Gabriel y de continuidad en dominios de ideales principales (DIPs) . . 69
4.2.1 Clasificación de los filtros lineales en DIPs . . . 69
4.2.2 Clasificación de los filtros de Gabriel en DIPs . . . 72
4.2.3 Clasificación de los filtros de continuidad en DIPs . . . 73
4.3 Clasificación de filtros de continuidad en productos finitos de anillos . . . 75
4.4 Módulos de cocientes en filtros de continuidad . . . 82
4.5 Filtros de continuidad con elemento menor . . . 90

5 Perspectivas de investigación **93**
5.1 Clasificación de filtros de continuidad en anillos específicos . . . 93
5.2 Filtros de continuidad en anillos de cocientes . . . 93
5.3 Iteración de módulos de cocientes . . . 93
5.4 Filtros de continuidad en módulos . . . 94
5.5 Filtros de continuidad en módulos bajo equivalencias . . . 94
5.6 Categoría de módulos filtrados . . . 95

Bibliografía **98**

Introducción

El capítulo 1 (preliminares) tiene como único objetivo que este trabajo sea lo más autocontenible posible, además de contener la notación y terminología que usaremos a lo largo del texto sobre, anillos, módulos y el lenguaje categórico. Ahora, si A denota un anillo asociativo con unidad, entonces A-**Mod** denotará la categoría de todos los A-módulos izquierdos. El capitulo 2 que lleva por nombre **Teorías de torsión y prerradicales** presentamos algunos conceptos y resultados básicos sobre prerradicales y teorías de torsión. Para más detalle, ver [5], y [10]. Un *prerradical* sobre un anillo A es una asignación $\sigma : A\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ tal que para cada $M \in A\text{-}\mathbf{Mod}$, $\sigma(M) \leq M$ y para cada homomorfismo $f : M \to N$, $f(\sigma(M)) \leq \sigma(N)$. Por lo que, σ puede ser considerado como un subfuntor del funtor identidad sobre de A-**Mod**. Por simplicidad, a veces escribiremos σM en lugar de $\sigma(M)$. A-pr denota la colección de todos los prerradicales sobre A. Los prerradicales preservan sumas directas, es decir, para cada familia $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de A-módulos izquierdos tenemos:

$$\sigma\left(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha\right) = \bigoplus_{\alpha \in I} \sigma(M_\alpha).$$

Hay un orden parcial natural sobre A-pr dado por $\sigma \preceq \tau$ si $\sigma(M) \leq \tau(M)$ para cada $M \in A$-Mod. De hecho, A-pr es una *gran* retícula (es decir, una retícula que no necesariamente es un conjunto) con ínfimo y supremo para cada $\sigma, \tau \in A$-pr, descritos como sigue: para cada $M \in R$-**Mod**:

$$(\sigma \wedge \tau)(M) = \sigma(M) \cap \tau(M),$$

$$(\sigma \vee \tau)(M) = \sigma(M) + \tau(M).$$

El ínfimo y el supremo pueden ser descritos de manera similar para una subcolección arbitraria de A-pr, considerando el hecho que, para cada $M \in A$-**Mod** una suma, o una intersección de submódulos de M la cuales están indexados por una clase pueden ser indexados por un conjunto. Por lo tanto A-pr es una gran retícula completa. Denotaremos como 0_A y 1_A a los elementos mínimo y máximo de A-pr, respectivamente.

Podemos describir los siguientes prerradicales dando una transformación natural entre funtores en A-**Mod**. Sea $H : A\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ un endofuntor sobre A-**Mod**. Consideremos $\gamma : 1_{A\text{-}\mathbf{Mod}} \to H$ una transformación natural, donde $1_{A\text{-Mod}}$ es el funtor identidad sobre A-**Mod**. Sea $\mathrm{Nu}(\gamma)$ un prerradical definido como $\mathrm{Nu}(\gamma)(M) = \mathrm{Nu}\,\gamma_M$, para cada $M \in A$-**Mod**. Ahora consideremos $\delta : H \to 1_{A\text{-Mod}}$ una transformación natural y sea $\mathrm{Im}(\delta)$ el prerradical definido por $\mathrm{Im}(\delta)(M) = \mathrm{Im}\ \delta_M$ para cada $M \in A$-**Mod**.

Tenemos dos operaciones binarias, una llamada *producto*, y lo denotamos por "$\cdot$", y otra llamada *coproducto*, denotado por ":", son definidas en A-pr. Para cada $\sigma, \tau \in A$-*pr* y si $M \in A$-**Mod**:

$$(\sigma \cdot \tau)(M) = \sigma(\tau(M)),$$
$$(\sigma : \tau)(M) \text{ es tal que } (\sigma : \tau)(M)/\sigma(M) = \tau(M/\sigma(M)).$$

Por lo general, escribimos $\sigma\tau$ en lugar de $\sigma \cdot \tau$. Estas operaciones son asociativas y preservan el orden. Es decir, para cada $\sigma, \tau \in A$-pr tenemos:

$$\sigma\tau \preceq \sigma \wedge \tau \preceq \sigma,\ \tau \preceq \sigma \vee \tau \preceq (\sigma : \tau).$$

Cada $\sigma \in A$ -pr se le puede asociar dos clases de A-módulos: $\mathbb{T}_\sigma = \{M \in A\text{-Mod} \mid \sigma(M) = M\}$, el cual es una *clase de pretorsión*, e.d., es cerrado bajo epimorfismos, suma directas, y $\mathbb{F}_\sigma = \{M \in A\text{-Mod} \mid$

$\sigma(M) = 0\}$, el cual es una *clase libre de pretorsion*, e.d., es cerrado bajo monomorfismos y productos directos. Notemos que si $\sigma \preceq \tau$ entonces $\mathbb{T}_\sigma \subseteq \mathbb{T}_\tau$ y $\mathbb{F}_\tau \subseteq \mathbb{T}_\sigma$.

Un prerradical σ sobre A es *idempotente* sí $\sigma\sigma = \sigma$, mientras que σ se llama *radical* sí $(\sigma : \sigma) = \sigma$. Notemos que σ es un radical si y solo si para cada $M \in A$-**Mod** tenemos que $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$. Diremos que σ es un prerradical *exacto izquierdo* si lo es como funtor. σ es un *t-radical* si preserva epimorfismos, o equivalentemente, si para cada $M \in A$-**Mod** tenemos que $\sigma(M) = \sigma(A)M$. Hay una correspondencia biunívoca entre prerradicales idempotentes y clases de pretorsión, y entre radicales y clases libres de pretorsión. Hasta antes de este trabajo existían únicamente dos conceptos de filtros, a saber, **filtros lineales** y **filtros de Gabriel** ambos constan de una familia de ideales izquierdos de un anillo A y que satisfacen ciertas condiciones. Hay una correspondencia uno a uno entre los filtros lineales y los prerradicales exactos izquierdos dada por:

$$\begin{aligned} &r \mapsto \mathcal{L}_r = \{{}_A I \leq A \mid A/I \in \mathbb{T}_r\}, \\ &\mathcal{L} \mapsto r_{\mathcal{L}}, \text{ donde } r_{\mathcal{L}}(M) = \{m \in M \mid \text{ existe } I \in \zeta \text{ tal que } Im = 0\}. \end{aligned}$$

Todo filtro de Gabriel es filtro lineal. Si r es un radical exacto izquierdo entonces su correspondiente filtro lineal $\mathcal{L}_r$ es un filtro de Gabriel, e inversamente, si $\mathcal{G}$ es un filtro de Gabriel entonces su correspondiente prerradical exacto izquierdo $r_{\mathcal{G}}$ es un radical. Entonces, existe una correspondencia uno a uno entre los radicales exactos izquierdos y los filtros de Gabriel. Más información sobre filtros de Gabriel se puede encontrar en [6].

El capítulo 3 reviste una alta relevancia, ya que aborda el punto de partida de esta tesis. Por tanto, resulta crucial desglosar minuciosamente el contenido de dicho capítulo, especialmente debido a la carencia de literatura que proporcione una síntesis detallada de cada fase, tal y como lo haremos en este trabajo. Sabemos que dado un dominio entero A, se denomina campo de fracciones de A al mínimo campo que lo contiene. Este campo siempre existe. Un ejemplo muy sencillo de esto, es $\mathbb{Q}$ que es el campo de fracciones de $\mathbb{Z}$. En el proceso de la construcción del campo de fracciones de $\mathbb{Z}$ se observa que dicha construcción, solo depende de tres cosas: (i) la estructura de anillo conmutativo de $\mathbb{Z}$, (ii) el conjunto $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Z}$, y (iii) S cumple con lo siguiente: $1 \in S$ y para cada $x, y \in S$, $xy \in S$. Esto último nos lleva a la definición bien conocida de conjunto multiplicativo sobre un anillo A arbitrario y consta de un conjunto $S \subseteq A$ que satisface (iii). Dado que (i), (ii), (iii) no son exclusivos del anillo $\mathbb{Z}$, entonces podemos considerar un anillo conmutativo arbitrario A junto con un subconjunto multiplicativo S de A, usando el mismo proceso se obtiene un anillo $\left[S^{-1}\right] A$, llamado anillo de fracciones. De nueva cuenta, analizando ciertas propiedades de este anillo, se prueba que este anillo queda totalmente determinado por un homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow \left[S^{-1}\right] A$ que cumple lo siguiente: (a) $\varphi(S) \subseteq U\left(\left[S^{-1}\right] A\right)$, (b) Los elementos de $\left[S^{-1}\right] A$ son de la forma $\varphi(s)^{-1}\varphi(a)$ con $s \in S$, $a \in A$, (c) $\operatorname{Nu}(\varphi) = \{a \in A : \text{ existe } s \in S \text{ tal que } sa = 0\}$. Las últimas tres propiedades (a), (b) y (c) nos permiten saltar al nivel de anillos no conmutativos como sigue; sea A anillo no conmutativo y S conjunto multiplicativo de A, se define un anillo de fracciones de A como un anillo $\mathfrak{A}$, junto con un homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow \mathfrak{A}$ que cumplen las propiedades (a), (b) y (c). Se demuestra que existe un anillo de fracciones de A, y éste es único salvo isomorfismos. Más aún $\left[S^{-1}\right] A$ existe si y solo si S satisface dos propiedades: (S_1) Para cada $a \in A$, $s \in S$, se tiene que $As \cap Sa = \emptyset$, (S_2) Para cada $a \in A$, $s \in S$ con $as = 0$, implica que existe $t \in S$ tal que $ta = 0$. Más aún, $\left[S^{-1}\right] A \cong S \times A/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida por: $(s, a) \sim (t, b)$ si existen $c, d \in A$ tales que $ca = db$ y $cs = dt \in S$. Se dice que un subconjunto S de A es un conjunto denominador (izquierdo) de A, si cumple con (S_1) y (S_2), a la primera condición se llama condición de Ore.

Ahora, si consideramos que S es un conjunto denominador y dado que φ es homomorfismo de anillos, entonces $\left[S^{-1}\right] A$ se puede ver como un A-módulo derecho, así, $\left[S^{-1}\right] A \cong \left[S^{-1}\right] A \otimes A$ tiene estructura de A-módulo izquierdo (en este caso, también derecho, pero solo nos interesa la estructura de módulo izquierdo). De manera que, podemos dar un salto más, esta vez a la categoría A-**Mod**. Así definimos para cada $M \in A$-**Mod** su módulo de fracciones de M como $\left[S^{-1}\right] M := \left[S^{-1}\right] A \otimes M$. Esta definición es completa en el sentido que es única salvo isomorfismo. Se demuestra que $\left[S^{-1}\right] M \cong S \times M/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida por: $(s, m) \sim (t, n)$ si existen $c, d \in A$ tales que $cs = dt \in S$ y $cm = dn$.

Continuando con el análisis de este proceso se puede probar que $\left[S^{-1}\right] M$ es isomorfo al módulo

$$\varinjlim_{I \in \mathcal{G}} \operatorname{Hom}_A\left(I, \frac{M}{t(M)}\right),$$

donde $\mathcal{G}_\circ = \{I : I \text{ es ideal izquierdo de } A \text{ y } (I:a) \cap S \neq \emptyset, \text{ para cada } a \in A\}$ que sabemos que es un filtro de Gabriel y t es el radical asociado a $\mathcal{G}_\circ$. Recordemos que un filtro de Gabriel $\mathcal{G}$ es una familia de ideales izquierdos no vacía que cumple: (i) si $I \in \mathcal{G}$, $a \in A$, entonces $(I : a) \in \mathcal{G}$, (ii) si $I, J \in \mathcal{I}(A)$ tales que $I \in \mathcal{G}$ y para cada $a \in I$, $(J : a) \in \mathcal{G}$, entonces $J \in \mathcal{G}$. Este último límite directo fue el motivo suficiente para pensar en la siguiente generalización de lo anterior. Consideremos un filtro de Gabriel $\mathcal{G}$, y para cada $M \in A$-**Mod**, se define

$$M_{(\mathcal{G})} := \varinjlim_{I \in \mathcal{G}} \operatorname{Hom}_A(I, M).$$

Una de sus principales propiedades es que $\left(M_{(\mathcal{G})}\right)_{(\mathcal{G})} \cong \left(\frac{M}{t(M)}\right)_{(\mathcal{G})}$, donde t es el radical asociado al filtro de Gabriel $\mathcal{G}$. Si a M le aplicamos la definición más de dos veces, todos serán isomorfos, es por esta razón que para cada $M \in A$-**Mod**, se define su *módulo de cocientes asociado al filtro de Gabriel* $\mathcal{G}$ como:

$$M_{\mathcal{G}} := \left(\frac{M}{t(M)}\right)_{(\mathcal{G})}.$$

Estos objetos conforman una categoría llamada **Categoría de Módulos de Cocientes**. Observe que en cada salto es una generalización del eslabón previo.

Siguiendo este camino, el proyecto pretende dar una generalización de esta categoría y el capitulo 4 es dedicado exclusivamente a esta generalización. En este capítulo hemos introducido un concepto nuevo de filtro al que hemos llamado **filtro de continuidad**. Un filtro de continuidad ζ sobre un anillo A consiste en una colección de ideales izquierdos de A tales que (1) $A \in \zeta$ y (2) si $I, J \in \zeta$ y $f \in \operatorname{Hom}_A(I, A)$, entonces $f^{-1}(J) \in \zeta$. En la sección titulada *Filtros de continuidad* nuestro principal objetivo es mostrar la diferencias que existen entre este nuevo concepto con respecto a los de filtros lineales y de Gabriel, es decir, asegurarnos que un filtro de continuidad no es equivalente a ninguno de los filtros previos. De hecho, nuestro primer resultado es el Teorema 4.1.2 en el que podemos notar que un filtro de continuidad es casi un filtro lineal, pero en realidad no hay relación de implicación entre ellos, los Ejemplos 4.1.3, 4.1.4 y 4.1.5 lo muestran. Sin embargo, todo filtro de Gabriel es filtro de continuidad pero el recíproco no necesariamente se cumple. Tenemos casos en que los tres conceptos coinciden como lo es cuando consideremos a los *anillo semisimples*. En un anillo auto-inyectivo todo filtro lineal es filtro de continuidad. La intersección de filtros de continuidad es un filtro de continuidad, de hecho, la Proposición 4.1.10 nos muestra que para cada filtro de continuidad podemos describir el filtro lineal más pequeño que lo contiene. En este mismo capítulo damos la clasificación de los filtros lineales, de Gabriel y de continuidad en un DIP con la finalidad de contrastar los conceptos, nos damos cuenta que en los DIPs los filtros de continuidad sí tienen diferencias notable con respecto a un filtro lineal pero no tanto con los filtros de Gabriel, de hecho, se prueba que en un DIP todo filtro de continuidad es un filtro de Gabriel o un filtro de Gabriel unión el ideal cero. En este mismo capítulo damos la clasificación de los filtros de continuidad en un producto finito de anillos que podríamos decir que es el principal teorema de este capítulo y nos permitió clasificar los filtros de Gabriel en los siguientes anillos: en **anillos locales uniseriales**, en **anillos conmutativos de ideales principales (AIP especial)**, en particular sobre las congruencias módulo n; $\mathbb{Z}_n$. Finalmente, para cada filtro de continuidad ζ de un anillo A y cada $M \in A$-**Mod** consideramos **su módulo de cocientes sobre el filtro** ζ como sigue:

$$M_{(\zeta)} := \varinjlim_{I \in \zeta} \operatorname{Hom}_A(I, M).$$

Resulta que $A_{(\zeta)}$ tiene estructura de anillo y $M_{(\zeta)}$ tiene estructura de $A_{(\zeta)}$-módulo izquierdo al igual que de A-módulo izquierdo, la función que permite darle estructura de A-módulo izquierdo a $M_{(\zeta)}$ es cuando consideramos el caso particular $M = A$ de los homomorfismos $\varphi_M : M \longrightarrow M_{(\zeta)}$ definidos como $m \to [(f_m, A)]$.

La asignación $F_\zeta : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A_{(\zeta)}\text{-}\mathbf{Mod}$ dada por $F_\zeta(M) = M_{(\zeta)}$ es un funtor covariante exacto izquierdo, de hecho, si consideramos el funtor olvidadizo $F'_\zeta : A_{(\zeta)}\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$ que manda cada $A_{(\zeta)}$-módulo izquierdo a si mismo pero considerado con la estructura de A-módulo izquierdo y tomamos el funtor $L_\zeta = F'_\zeta \circ F_\zeta$, entonces se puede demostrar que la clase $\{\varphi_M\}$ conforman una transformación natural $\varphi : \mathrm{id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}} \to L_\zeta$. Ahora, para cada filtro de continuidad ζ existe un prerradical exacto izquierdo (idempotente) asociado r_ζ, el cual es definido como:

$$r_\zeta(M) = \operatorname{Nu}(\varphi_M^\zeta) = \{m \in M : \text{ existe } I \in \zeta \text{ tal que } Im = 0\}, \text{ con } M \in \operatorname{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod}).$$

En otras palabras, $r_\zeta = \mathrm{Nu}(\varphi^\zeta)$, donde $\varphi^\zeta : \mathrm{id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}} \longrightarrow L_\zeta$ es la transformación natural asociada a ζ. Este prerradical tiene asociado al filtro lineal $\mathcal{L}_{r_\zeta} = \left\{ I \in \mathcal{I}(A) : A/I \in \mathbb{T}_{r_\zeta} \right\}$ y de hecho es justo el filtro lineal menor que contiene a ζ, es decir, $\mathcal{L}_{r_\zeta} = \mathcal{L}(\zeta)$. En general, $\mathcal{L}_{r_\zeta} = \mathcal{L}(\zeta)$ si y solo si ζ es filtro lineal, y un caso que cumple eso son los **AIP**'s especiales, en particular, las congruencias módulo n ($\mathbb{Z}_n$). Finalmente, si nos fijamos únicamente en los filtros de continuidad con elemento menor $\cap\zeta$, resulta que este elemento menor es (A, A)-bimódulo y nos permite describir como A-modulo izquierdo a los módulos iterados de cocientes sobre dicho filtro ζ para cada $M \in A\text{-}\mathbf{Mod}$, concretamente tendremos:

$$M_{(n)} \cong \mathrm{Hom}_A\left(T_n, M\right), \text{ donde } T_n = \bigotimes_{i=1}^{n} \cap\zeta$$

$M_{(1)} := M_{(\zeta)}$, si $n = 1$ y $M_{(n)} := \left[M_{(n-1)}\right]_{(\zeta)}$, si $n > 1$. Por lo tanto, en este caso tendremos que los módulos de cocientes sobre este tipo de filtros de continuidad ζ con elemento mínimo conmutan con productos, esto es, si $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ es una familia de A-módulos izquierdos, entonces:

$$\left(\prod_{\lambda\in\Delta} M_\lambda\right)_{(\zeta)} = \prod_{\lambda\in\Delta} (M_\lambda)_{(\zeta)}.$$

Aún más, si consideramos cualquier anillo local uniserial podemos describir los anillos cocientes sobre cada filtro de continuidad con elemento mínimo. Y si consideramos cualquier anillo auto-inyectivo A y L un ideal de A, entonces $L_{(\zeta)}$ es isomorfo a un ideal de $A_{(\zeta)}$. Culminamos este trabajo con el capítulo 5 en el que hablamos sobre posibles lineas de investigación, un ejemplo de esto es la una extensión del concepto de filtro de continuidad en cualquier módulo izquierdo.

Capítulo 1

Preliminares

Con la finalidad de que el presente trabajo sea lo más autocontenido posible y sin caer en la trivialidad, en este primer capítulo se presentan las secciones de anillos, módulos y teoría de categorías que tiene como objetivo incluir lo suficiente y necesario para el entendimiento de este texto. Además de que gran parte de la notación y terminología que se usarán en lo subsecuente están descritos en este apartado. Cabe señalar que se suponen conocidos los conceptos y resultados presentados en cada sección, es decir, por lo general omitimos la demostración de los resultados presentados pues son considerados de dominio común, o bien, podrán ser consultados en alguna de las fuentes citadas en la bibliografía como lo son [1] [2].

1.1. Teoría de Categorías

1.1.1. Categorías

La Teoría de Categorías es el terreno para discutir propiedades generales de sistemas como los grupos, anillos, módulos, conjuntos, o espacios topológicos, con sus respectivas transformaciones: homomorfismos, funciones, o funciones continuas.

Definición 1.1.1. *Una **categoría** $\mathcal{C}$ consiste de tres ingredientes; una clase de objetos* $\mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$*, para cada* $(A,B) \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}) \times \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ *un conjunto de morfimos* $\mathrm{Hom}\,(A,B)$*, y para cada* $A,B,C \in \mathrm{Obj}\,(C)$ *una composición* $\circ : \mathrm{Hom}\,(A,B) \times \mathrm{Hom}\,(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(A,C)$*, denotado por*

$$(f,g) \mapsto g \circ f$$

A menudo se escribe $f : A \longrightarrow B$ *o* $A \xrightarrow{f} B$ *en lugar de* $f \in \mathrm{Hom}\,(A,B)$*. Estos ingredientes están sujetos a los siguientes axiomas:*

(i) Los conjuntos de Hom *son disjuntos por pares: Esto es, si* $f \in \mathrm{Hom}\,(A,B)$ *tiene un único **domino*** A *y un único **codominio*** B*.*

(ii) Para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$*, existe un **morfismo identidad*** $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}\,(A,A)$ *tal que para todo* $f \in \mathrm{Hom}\,(A,B)$ *se tiene que* $f \circ \mathrm{id}_A = f$ *y* $\mathrm{id}_B \circ f = f$*.*

(iii) La composición es asociativa: Dados morfismos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$*, entonces*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Proposición 1.1.2. *Los morfismos identidad de una categoría* $\mathcal{C}$ *son únicos (con la propiedad descrita en 1.1.1, inciso (ii)).*

Definición 1.1.3. *Una categoría* $\mathcal{S}$ *es una **subcategoría** de una categoría* $\mathcal{C}$ *si* (*i*) $\mathrm{Obj}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,

(*ii*) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(M,N) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N)$ *para todo* $M,N \in \mathrm{Obj}(\mathcal{S})$, *donde nosotros denotamos a los conjuntos* Hom *en* $\mathcal{S}$ *por* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\Box,\Box)$,

(*iii*) *Si* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(M,N)$ *y* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(N,K)$, *entonces la composición* $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(M,K)$ *es igual a la composición* $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,K)$,

(*iv*) *Si* $M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{S})$, *entonces el morfismo identidad* $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(M,M)$ *es igual a la identidad* $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,M)$.

Una subcategoría $\mathcal{S}$ *de* $\mathcal{C}$ *es* ***plena*** *si para todo* $M,N \in \mathrm{Obj}(\mathcal{S})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(M,N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N)$.

Definición 1.1.4. *Si* $\mathcal{C}$ *es una categoría, definamos su* ***categoría opuesta*** $\mathcal{C}^{op}$ *es la categoría con* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, *con morfismos* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(M,N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,M)$ *(podriamos escribir los morfismos en* $\mathcal{C}^{op}$ *como* f^{op}, *donde* f *es un morfismo en* $\mathcal{C}$*) y con composición el inverso de la de* $\mathcal{C}$*; esto es,* $g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op}$

Ilustramos la composición en $\mathcal{C}^{op}$: un diagrama $C'' \xrightarrow{f^{op}} C' \xrightarrow{g^{op}} C$ en $\mathcal{C}^{op}$ corresponde al diagrama $C \xrightarrow{g} C' \xrightarrow{f} C''$ en $\mathcal{C}$. Las categorías opuestas son difíciles de visualizar. Por ejemplo en $\mathbf{Sets}^{op}$, el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{op}}(X,\emptyset)$, para cada conjunto X, tiene exactamente un elemento, a saber, ι^{op}, donde ι es la inclusión $\emptyset \longrightarrow X$ en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(\emptyset, X)$. Pero $\iota^{op} : X \longrightarrow \emptyset$ no puede ser una función, porque no hay funciones de un conjunto no vació al conjunto vacío.

Definición 1.1.5. *Un morfismo* $f : C \longrightarrow C'$ *en una categoría* $\mathcal{C}$ *es in* ***isomorfismo*** *si existe un morfismo* $g : C' \longrightarrow C$ *en* $\mathcal{C}$ *con*

$$g \circ f = \mathrm{id}_C \ \ y \ f \circ g = \mathrm{id}_{C'}$$

El morfismo g *se llama* ***inverso*** *de* f

Las siguientes definiciones son muy conocidas pero no esta de más mencionarlas.

Definición 1.1.6. *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría y* $\{X_i\}_{i\in I}$ *una familia de objetos de* $\mathcal{C}$. *Diremos que* $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *es un coproducto de* $\{X_i\}_{i\in I}$ *si y solo si existe una familia de morfismos* $\{\iota_i : X_i \longrightarrow X\}_{i\in I}$ *llamados* ***inyecciones canónicas****, tal que para cualquier otro objeto* Y *y una familia de morfismos* $\{f_i : X_i \longrightarrow Y\}_{i\in I}$ *existe un único* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *tal que* $f_i = f \circ \iota_i$. *Esto es, el siguiente diagrama conmuta para cualquier* $i \in I$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] & \\ X_j \arrow[u, "\iota_j"] \arrow[r, "f_j"'] & Y \end{tikzcd}$$

Dicho objeto, es usualmente denotado por $\bigoplus_{i\in I} X_i$ *o* $\coprod_{i\in I} X_i$.

Definición 1.1.7. *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría y* $\{X_j\}_{j\in J}$ *una familia de objetos de* $\mathcal{C}$. *Diremos que* $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *es un* ***producto*** *de* $\{X_j\}_{j\in J}$ *si y solo si existe una familia de morfismos* $\{\pi_j : X \longrightarrow X_j\}_{j\in J}$ *llamados* ***proyecciones canónicas****, tal que para cualquier otro objeto* Y *y una familia de morfismos* $\{f_j : Y \longrightarrow X_j\}_{j\in J}$ *existe un único* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ *tal que el siguiente diagrama conmuta para cualquier* $j \in J$:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

El producto se denota como $\prod_{j\in J} X_j$; *si* $I = \langle 1,\ldots,n\rangle$, *entonces se denota como* $X_1 \times \cdots \times X_n$ *y el morfismo producto como* $\langle f_1,\ldots,f_n\rangle$.

1.1.2. Funtores

Los funtores son los morfismos entre las categorías.

Definición 1.1.8. *Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías, entonces un* ***funtor (covariante)*** $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *es una aplicación tal que*

(i) *Si* $M \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$*, entonces* $F(M) \in \operatorname{Obj}(\mathcal{D})$.

(ii) *Para* $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$*, entonces* $F(f) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(M), F(N))$.

(iii) *Para* $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K$ *en* $\mathcal{C}$*, entonces* $F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(G)} F(K)$ *esta en* $\mathcal{D}$ *y*
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

(iv) *Para cada* $M \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, $F(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{F(M)}$.

■ **Ejemplos 1.1.9.** (i) *Si $\mathcal{S}$ es una subcategoría de una categoría $\mathcal{C}$, entonces la definición de subcategoría podría reescribirse diciendo que la inclusión $I : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}$ es un funtor [esta es la razón de la presencia del axioma (iv) en la definición 1.1.8].*

(ii) *Si $\mathcal{C}$ es una categoría, entonces el* ***funtor identidad*** $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ *es definido por* $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(M) = M$ *para todo objeto M y* $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ *para todo morfismo f.*

(iii) *Si $\mathcal{C}$ es una categoría y* $M \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$*, entonces la asignación* $\operatorname{Hom}(M, \square) : \mathcal{C} \longrightarrow$ ***Sets****, dada por*

- *Para todo* $N \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, $N \xmapsto{\operatorname{Hom}(M,\square)} \operatorname{Hom}(M, N)$.
- *Para cada* $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(N, N')$, $\operatorname{Hom}(M, f) : \operatorname{Hom}(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, N')$ *esta dada por* $\operatorname{Hom}(M, f)(h) = f \circ h$ *es un funtor. Denotamos a* $\operatorname{Hom}(M, f)$ *como* f_*.

(iv) *Define el* ***funtor olvidadizo*** U : ***Grp*** $\to$ ***Sets*** *como sigue: para un grupo G, $U(G)$ es el conjunto que subyace de G y para un homomorfismo de grupos f, $U(f)$ es f considerado únicamente como función. Estrictamente hablando, un grupo G es un par ordenado (G, μ) [donde G es su (subyacente) conjunto y $\mu : G \times G \longrightarrow G$ es su operación], y $U((G, \mu)) = G$; el funtor U olvida la operación y recuerda solo el conjunto. Hay muchas variantes. Por ejemplo un anillo es una triple ordenada (A, α, μ) [donde $\alpha : A \times A \longrightarrow A$ es la suma y $\mu : A \times A \longrightarrow A$ es la multiplicación], hay funtores olvidadizos* U' : ***Anillos*** $\longrightarrow$ ***Ab*** *con* $U(A, \alpha, \mu) = (A, \alpha)$ *el grupo aditivo de A, y* U'' : ***Anillos*** $\longrightarrow$ ***Sets*** *con* $U''(A, \alpha, \mu) = A$*, el conjunto.*

Un segundo tipo de funtores que invierte morfismos.

Definición 1.1.10. *Un* ***funtor contravariante*** $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$*, donde $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías, es una asociación tal que*

(i) *Si* $C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$*, entonces* $G(C) \in \operatorname{Obj}(\mathcal{D})$.

(ii) *Para cada* $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$, $G(f) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(G(C') \longrightarrow G(C))$.

(iii) *Para* $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C''$ *en* $\mathcal{C}$, $G(C'') \xrightarrow{G(g)} G(C') \xrightarrow{G(f)} (C)$ *está en* $\mathcal{D}$ *y*
$$G(g \circ f) = G(f) \circ G(g).$$

(iv) *Para todo* $C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, $G(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{G(C)}$.

■ **Ejemplo 1.1.11.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y* $N \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$*, entonces la asignación* $\operatorname{Hom}(\square, N) : \mathcal{C} \longrightarrow$ ***Sets****, dada por*

- *Para todo* $C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, $C \xmapsto{\operatorname{Hom}(\square,N)} \operatorname{Hom}(C, N)$.

- *Para cada* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$*, se tiene que* $\mathrm{Hom}(f, N) : \mathrm{Hom}(C, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C', N)$ *está definido como* $\mathrm{Hom}(f, N)(h) = h \circ f$*.*

es un funtor contravariante. Generalmente denotamos al morfismo inducido $\mathrm{Hom}(f, N)$ *como* f^**.*

Proposición 1.1.12. *Sea* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *un funtor covariante [contravariante]. Si* $f : C \longrightarrow C'$ *es un isomorfismo en* $\mathcal{C}$*, entonces* $F(f)$ *es un isomorfismo en* $\mathcal{D}$*.*

Esta proposición ilustra, ciertamente en un nivel bajo, una razón del por qué es útil dar definiciones categóricas.

1.1.3. Transformaciones naturales

Así como los homomorfismos comparan objetos algebraicos y los funtores comparan categorías, las transformaciones naturales comparan funtores.

Definición 1.1.13. *Sean* $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *funtores covariantes. Una* ***transformación natural*** $\tau : F \longrightarrow G$ *es una familia de morfismos en* $\mathcal{D}$*,*

$$\tau = \{\tau_C : F(C) \longrightarrow G(C)\}_{C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})}$$

tal que el siguiente diagrama conmuta para cada $f : C \longrightarrow C'$ *en* $\mathcal{C}$*:*

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & G(C') \end{tikzcd}$$

Un ***isomorfismo natural*** *es una transformación natural tal que cada* τ_C *es un isomorfismo.*

Las transformaciones naturales entre funtores contravariantes son definidos de manera similar (remplazando $\mathcal{C}$ por $\mathcal{C}^{op}$). A partir de aquí diremos únicamente funtor cuando nos refiramos a funtor covariante. Las transformaciones lineales pueden ser compuestas. Si $\tau : F \longrightarrow G$ y $\sigma : G \longrightarrow H$ son transformaciones lineales, donde $F, G, H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ son funtores, entonces definimos $\sigma \circ \tau : F \longrightarrow H$ por

$$(\sigma \circ \tau)_C = \sigma_C \circ \tau_C$$

para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Es fácil verificar que $\sigma \circ \tau$ es una transformación natural. Para cada funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, se define la **transformación natural identidad** $\mathrm{id}_F : F \longrightarrow F$ como sigue; para cada $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $(\mathrm{id}_F)_C : F(C) \longrightarrow F(C)$ es el morfismo identidad $\mathrm{id}_{F(C)}$.

Proposición 1.1.14. *Una transformación natural* $\tau : F \longrightarrow G$ *es un isomorfismo natural si y solo si existe una transformación natural* $\sigma : G \longrightarrow F$ *tal que*

$$\sigma \circ \tau = \mathrm{id}_F \;\; y \;\; \tau \circ \sigma = \mathrm{id}_G$$

Notación. Si $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ son funtores de la misma variante, entonces

$$\mathrm{Nat}(F, G) = \{\tau : F \longrightarrow G : \tau \text{ es transformación natural}\}.$$

En general, $\mathrm{Nat}(F, G)$ podría no ser un conjunto. El siguiente teorema muestra que $\mathrm{Nat}(F, G)$ es un conjunto cuando $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \square)$.

Teorema 1.1.15 (Lema de Yoneda). *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría,* $M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$*, y sea* $G : \mathcal{C} \longrightarrow$ ***Sets*** *un funtor covariante. Entonces existe una biyección*

$$\begin{aligned} &y : \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \square), G) \longrightarrow G(A), \text{ dada por} \\ &\quad y(\tau) = \tau_M(\mathrm{id}_M) \end{aligned}$$

Dem.
Si $\tau : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \square) \longrightarrow G$ es una transformación natural, entonces $y(\tau) = \tau_M(\mathrm{id}_M) \in G(M)$ porque $\tau_M : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M) \longrightarrow G(M)$ por lo tanto y esta bien definida.

Para cada $N \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M) \arrow[r, "\tau_M"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & G(M) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \arrow[r, "\tau_N"'] & G(N) \end{tikzcd}$$

Así que,

$$G(\varphi) \circ \tau_M(\mathrm{id}_M) = \tau_N \circ \varphi_*(\mathrm{id}_M) = \tau_N(\varphi \circ \mathrm{id}_M) = \tau_N(\varphi) .$$

Veamos que y es inyectiva: Para ello, sea $\sigma : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \square) \longrightarrow G$ otra transformación natural tal que $y(\tau) = y(\sigma)$, es decir, $\tau_M(\mathrm{id}_M) = \sigma_M(\mathrm{id}_M)$. Entonces para cada $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ tenemos que

$$\tau_N(\varphi) = G(\varphi) \circ \tau_M(\mathrm{id}_M) = G(\varphi) \circ \sigma_M(\mathrm{id}_M) = \sigma_N(\varphi) .$$

Esto es, $\sigma_N = \tau_N$, y como N es arbitrario, entonces $\sigma = \tau$. Por lo tanto, y es inyectiva.

Ahora, veamos que y es sobreyectiva: Sea $x \in G(M)$. Para $N \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y $\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$, definimos

$$\tau_N(\psi) = G(\psi)(x)$$

[Notemos que $G(\psi) : G(M) \longrightarrow G(N)$, así que $G(\psi)(x) \in G(N)$]. Afirmamos que τ es una transformación natural, nos resta verificar que el siguiente diagrama conmuta para $\theta : N \longrightarrow K$:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \arrow[r, "\tau_N"] \arrow[d, "\theta_*"'] & G(N) \arrow[d, "G(\theta)"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, K) \arrow[r, "\tau_K"'] & G(K) \end{tikzcd}$$

Sea $\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$, tenemos que

$$\begin{aligned} G(\theta) \circ \tau_N(\psi) &= G(\theta)(G(\psi)(x)) = (G(\theta) \circ G(\psi))(x) = G(\theta \circ \psi)(x) \\ &= \tau_K(\theta \circ \psi) = \tau_K(\theta_*(\psi)) = \tau_N \circ \theta_*(\psi). \end{aligned}$$

Por lo tanto, τ es una transformación natural. Ahora, $y(\tau) = \tau_M(\mathrm{id}_M) = G(\mathrm{id}_M)(x) = \mathrm{id}_{G(M)}(x) = x$, y así y es una biyección.

Q.E.D

Definición 1.1.16. *Un funtor covariante $F : \mathcal{C} \longrightarrow$ **Sets** es **representable** si existe un objeto $M \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ tal que $F \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \square)$.*

En el siguiente resultado la parte más interesante es la (iii), el cual dice que si F es representable, entonces el objeto es único salvo isomorfismos.

Corolario 1.1.17. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean $M, N \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$.*

(i) *Si $\tau : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \square) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \square)$ es una transformación natural, entonces para todo $C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, tenemos que $\tau_C = \psi^*$, donde $\psi = \tau_M(\mathrm{id}_M) : N \longrightarrow M$ y el morfismo inducido esta dado por*

$$\begin{aligned} \psi^* : &\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, C) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(N, C), \\ &\psi^*(\varphi) = \varphi \circ \psi \end{aligned}$$

Más aún, el morfismo ψ es único. Si $\tau_{\mathcal{C}} = \theta^*$, entonces $\theta = \psi$.

(ii) *Sean* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,\square) \xrightarrow{\tau} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,\square) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K,\square)$ *transformaciones naturales. Si* $\sigma_C = \eta^*$ *y* $\tau_C = \psi^*$ *para todo* $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$*, entonces*

$$(\sigma \circ \tau)_C = (\psi \circ \eta)^* .$$

(iii) *Si* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,\square)$ *y* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,\square)$ *son funtores naturalmente isomorfos, entonces* $M \cong N$ *(El inverso también es cierto)*

Dem.
(i) Si denotamos $\tau_M(\mathrm{id}_M) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,M)$ por ψ, entonces el lema Yoneda dice que para cada $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,C)$, que $\tau_{\mathcal{C}}(\varphi) = \varphi_*(\psi)$. Pero, $\varphi_*(\psi) = \varphi \circ \psi = \psi^*(\varphi)$. La unicidad se sigue de la inyectividad de la función y del lema de Yoneda.

(ii) Por la parte *(i)*, hay un único morfismo $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,M)$ y $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K,N)$ con

$$\tau_{\mathcal{C}}(\varphi) = \psi^*(\varphi) \quad \text{y} \quad \sigma_{\mathcal{C}}(\varphi') = \eta^*(\varphi') .$$

Para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,C)$ y $\varphi' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,C)$. Por definición, $(\sigma \circ \tau)_C = \sigma_C \circ \tau_C$ y así

$$(\sigma \circ \tau)_C(\varphi) = \sigma_C(\psi^*(\varphi)) = \eta^* \circ \psi^*(\varphi) = (\psi \circ \eta)^*(\varphi).$$

(iii) Si $\tau : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,\square) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,\square)$ es un isomorfismo natural, entonces hay un isomorfismo natural $\sigma : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,\square) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,\square)$ con $\sigma \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,\square)}$ y $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}}(N,\square)$. Por la parte *(i)*, hay un morfismo $\psi : N \longrightarrow M$ y $\eta : M \longrightarrow N$ con $\tau_C = \psi^*$ y $\sigma_C = \eta^*$ para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Por la parte *(ii)*, tenemos $\tau \circ \sigma = \psi^* \circ \eta^* = (\eta \circ \psi)^* = \mathrm{id}_N^*$ y $\sigma \circ \tau = (\psi \circ \eta)^* = \mathrm{id}_M^*$. La unicidad en la parte *(i)* obtenemos que $\psi \circ \eta = \mathrm{id}_M$ y $\eta \circ \psi = \mathrm{id}_N$, asi que $\eta : M \longrightarrow N$ es un isomorfismo.

Q.E.D

■ **Ejemplo 1.1.18.** *Informalmente, si* $\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}$ *son categorías, la* ***categoría funtor*** $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ *tiene como objetos los funtores covariantes* $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *y como sus morfismos todas las transformaciones naturales. Cada funtor* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *tiene una transformación natural identidad* $\mathrm{id}_F : F \longrightarrow F$*, y composición de transformaciones naturales es una transformación natural. Pero hay aquí un problema de teoría de conjuntos:* $\mathrm{Nat}(F,G)$ *necesita ser un conjunto. Recordemos que una categoría* $\mathcal{A}$ *es pequeña si la clase* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *es un conjunto; es este caso,* $\mathrm{Nat}(F,G)$ *es un conjunto, y así la definición formal de categoría de funtores* $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ *requiere que* $\mathcal{C}$ *sea una categoría pequeña.*

Corolario 1.1.19 (**Inmersión de Yoneda**). *Si* $\mathcal{C}$ *es una categoría pequeña, entonces existe un funtor* $Y : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \boldsymbol{Sets}^{\mathcal{C}}$ *que es inyectiva en objetos y cuya imagen es una subcategoría plena de* $\boldsymbol{Sets}^{\mathcal{C}}$

Dem.
Definimos Y sobre los objetos por $Y(C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\square)$. Si $C \neq C'$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\square) \neq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(C,\square)$ (definición de categoría); esto es, $Y(C) \neq Y(C')$, y así Y es inyectiva en objetos. Si $\psi : C' \longrightarrow C$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces hay una transformación natural $Y(\psi) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\square) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C',\square)$ con $Y(\psi)_C = \psi$ para cada $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, por el corolario 1.1.17(i). Ahora, por el corolario 1.1.17(ii) tenemos $Y(\psi \circ \eta) = Y(\eta) \circ Y(\psi)$, y así Y es un funtor contravariante. Finalmente, la sobreyectividad de la función de Yoneda y en el teorema 1.1.16 muestra que cada transformación natural $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\square) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C',\square)$ surge como $Y(\psi)$ para algún ψ. Por lo tanto, la imagen de Y es una subcategoria plena de la categoría de funtores $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}}$.

Q.E.D

1.2. Anillos

En términos generales, asumiremos que estamos familiarizados con los conceptos y resultados fundamentales de la teoría de anillos. No obstante, en esta sección, se presentarán algunos resultados que serán útiles en etapas posteriores, con el único propósito de contar con ellos cuando se mencionen ciertos conceptos o resultados en este contexto. Es importante subrayar que a lo largo de todo el texto, estaremos suponiendo que los anillos cuentan con unidad.

Notación 1. *Denotaremos como **Anillos** a la categoría de anillos y como **ConmAnillos** a la categoría de anillos conmutativos. También;*

- $\mathcal{I}(A) := \{I : I \text{ es ideal izquierdo de } A\}$,
- $U(A) := \{r : r \text{ es invertible en (unidad de)} A\}$,
- $A^* = A \setminus \{0\}$,
- $\mathcal{D}(A)$ *denotará el conjunto de todos los divisores de cero del anillo A.*

Diremos que I es un **ideal** o **ideal bilateral** si es ideal izquierdo y derecho.

Teorema 1.2.1. *Sean $A_1, \ldots, A_n \in$ **Anillos** y $A = \prod_{i=1}^n A_i$.*

(i) *Si para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $I_i \in \mathcal{I}(A_i)$, entonces $I = \displaystyle\prod_{i=1}^n I_i \in \mathcal{I}(A)$.*

(ii) *$I \in \mathcal{I}(A)$ si y solo si para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $I_i \in \mathcal{I}(A_i)$ tal que $I = \displaystyle\prod_{i=1}^n I_i$, más aún, $I_i = \pi_i(I)$.*

Definición 1.2.2. *Sea A un anillo.*

- *Si $\mathcal{D}(A) = \emptyset$, entonces diremos que A es un **dominio entero**.*
- *A se llama **anillo de ideales principales izquierdo (derecho)** si cada ideal izquierdo(derecho) es principal y que denotaremos como **AIP izquierdo (AIP derecho)**. Cuando se satisface tanto para los ideales izquierdos como para los derechos, entonces lo llamaremos **anillo de ideales principales (AIP)**. Y si ademas es un dominio, entonces diremos que A es un **dominio de ideales principales** (DIP).*
- *A satisface la **condición de cadena ascendente** (CCA) en sus ideales izquierdos (o derechos), si para todo $I_1, I_2, \ldots$ tales que $I_1 \subseteq I_2, \ldots$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \leq m$, $I_k = I_m$. Se dice que A es **noetheriano por la izquierda** si satisface CCA en sus ideales izquierdos, **noetheriano por la derecha** si satisface CCA en sus ideales derechos y **noetheriano** si satisface CCA en sus ideales izquierdos y derechos.*
- *A satisface la **condición de cadena descendente** (CCD) en sus ideales izquierdos (o derechos), si para todo $I_1, I_2, \ldots$ tales que $I_1 \supseteq I_2, \ldots$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \leq m$, $I_k = I_m$. Se dice que A es **artiniano por la izquierda** si satisface CCD en sus ideales izquierdos, **artiniano por la derecha** si satisface CCD en sus ideales derechos y **artiniano** si satisface CCD en sus ideales izquierdos y derechos.*

Recordemos los conceptos de divisibilidad en anillos.

Definición 1.2.3. *Sea A un anillo y $a, b \in A$.*

(1) *a es un **divisor por la izquierda** de b o que b **múltiplo por la derecha** de a si existe $x \in A$ tal que $ax = b$.*

(2) *a es un **divisor por la derecha** de b o que b es un **múltiplo por la izquierda** de a si existe $x \in A$ tal que $xa = b$.*

(3) *a es **divisor bilateral** de b si lo es por ambos lados.*

(4) *Si A es conmutativo, entonces las definiciones $(1) - (3)$ coinciden, por lo que solo se dice que a es **divisor** de b o b es múltiplo de a si existe $x \in A$ tal que $xa = b$ y se escribe $a|b$.*

(5) *Si A es conmutativo, $a|b$ y $b|a$, entonces decimos que a y b son asociados.*

Las afirmaciones sobre divisibilidad en un anillo conmutativo se pueden traducir en declaraciones sobre el ideal principal, y que usaremos en el último capitulo.

Proposición 1.2.4. *Sea A un anillo conmutativo.*

(1) *$a|b$ si y solo si $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$.*

(2) *a y b son asociados si y solo si $\langle a \rangle = \langle b \rangle$.*

(3) *$u \in U(A)$ si y solo si para cada $a \in A$, $u|a$.*

(4) *$u \in U(A)$ si y solo si $\langle u \rangle = A$.*

(5) *Si $a = bu$ para algún $u \in U(A)$, entonces a y b son **asociados**.*

Definición 1.2.5. *Sea A un anillo conmutativo y $a, b, p \in A$.*

(1) *p es un **elemento primo** de A si y solo si $p|ab$ en A, entonces $p|a$ o $p|b$.*

(2) *p es **irreducible** si y solo si $a|p$ entonces $a \in U(A)$ o a es asociado con p.*

Teorema 1.2.6. *Sea D un DIP, entonces D satisface CCA y todo elemento que no es cero y no es unidad, puede ser escrito como producto de una cantidad finita de elementos irreducibles.*

Teorema 1.2.7. *Todo ideal máximo es un ideal primo.*

Corolario 1.2.8. *Sea D un DIP y $p \in D$ un elemento irreducible, entonces p es un elemento primo.*

Definición 1.2.9. *Sea D un dominio entero, diremos que D es un **dominio de factorización única** (DFU) si y sólo si para todo $r \in D^*$ y $r \notin U(D)$ existen $p_1, p_2, \ldots, p_t \in D$ elementos irreducibles, tales que $r = p_1 p_2 \cdots p_t$ y esta descomposición es única salvo asociados.*

Teorema 1.2.10. *Todo DIP es un DFU.*

Lema 1.2.11. *Sea A un DIP. Para todo $a, b \in A$ se cumplen las siguientes:*

(1) *Si $f \in \mathrm{Hom}_A(\langle a \rangle, A)$, entonces $f = 0$ ó f es inyectiva.*

(2) $\langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle$

(3) $\langle ab \rangle = \langle a \rangle b$

Lema 1.2.12. *Sea A un DIP, $a, b, c \in A$, $d = \mathrm{mcd}(a, b)$ y $a', b' \in A$ tales que $a = da'$, $b = db'$. Las siguientes se cumplen:*

(a) *Si $d \in \mathrm{U}(A)$, y $a|bc$, entonces $a|c$.*

(b) $\mathrm{mcd}(a', b') \in \mathrm{U}(A)$.

(c) $(\langle b \rangle : a) = \langle b' \rangle$.

Proposición 1.2.13. *Sea A un dominio entero y consideremos la relación $a \sim b$ en A si y sólo si a, b son asociados. Entonces, $\sim$ es una relación de equivalencia.*

Definición 1.2.14. *Sea D un dominio entero y $\sim$ una relación de equivalencia. Un **sistema completo de representantes de la relación** $\sim$ es un subconjunto $X \subseteq D$ tal que para todo $a \in D$ existe un único $x \in X$ tal que $a \sim x$.*

Definición 1.2.15. *Un anillo A es **uniserial izquierdo (derecho)** si sus ideales izquierdos (derechos) están totalmente ordenados por inclusión y diremos que es **uniserial** si los es por la izquierda y derecha.*

Definición 1.2.16. *Un anillo A es **local** si cumple las siguientes propiedades equivalentes:*

- *Tiene un único ideal izquierdo máximo.*
- *Tiene un único ideal derecho máximo.*
- $1 \neq 0$, *y si $x, y \in A \setminus U(A)$, entonces $x + y \in A \setminus U(A)$.*
- $1 \neq 0$, *y si $x \in A$, entonces $x \in U(A)$ o $1 - x \in U(A)$.*
- *Si $x_1, \ldots, x_n \in A$ tal que $x_1 + \cdots + x_n \in U(A)$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_i \in U(A)$.*

Si se dan estas propiedades, entonces el único ideal por la izquierda máximo coincide con el único ideal máximo por la derecha y también con el Radical de Jacobson del anillo.

Proposición 1.2.17. *[7, P. 210, Section: Uniserial rings, Theorem 1] Las siguientes condiciones sobre un anillo A son equivalentes.*

(a) *A es uniserial.*

(b) *A es un **AIP** artiniano.*

Definición 1.2.18. *Un anillo A se llamará **anillo de ideales principales especial (AIP especial)** si es conmutativo, local y uniserial.*

Proposición 1.2.19. *Si A es un anillo local uniserial con ideal máximo $M = \langle a \rangle$, entonces,*

(a) *Si $b \in A$, entonces $b \in U(A)$ ó $b \in M$.*

(b) *Para cada $j \in \mathbb{N}_0$ y $M^j = \langle a^j \rangle$, donde $a^0 := 1$ y $M^0 := A$. Además, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que*

$$A = M^0 \supseteq M \supseteq \cdots \supseteq M^k = 0.$$

(c) $\mathcal{I}(A) = \{M^j : j \in \{0, \ldots, k\}\}$.

(d) *Todo los ideales izquierdos son ideales derechos, es decir, bilaterales.*

Teorema 1.2.20 (Teorema de Zariski - Samuel). *Sea A un anillo conmutativo. Si A es un **AIP**, entonces $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, donde A_i es un **DIP** o un **AIP especial**.*

Teorema 1.2.21 (Teorema Chino del Residuo para Anillos). *Sea A un anillo conmutativo y $I_i, \ldots, I_n$ ideales de A tales que $I_i + I_j = A$ para cada $i \neq j$. Entonces,*

$$A/I_1 \cdots I_n \cong \prod_{k=1}^{n} A/I_k, \quad a + I_1 \cdots I_n \mapsto (a + I_k)_{1 \leq k \leq n}$$

1.3. Módulos

1.3.1. Teoría de Módulos

En este trabajo, partiremos del supuesto de que los lectores poseen un conocimiento básico y fundamental sobre la teoría de módulos, el cual se adquiere en cursos de álgebra moderna a nivel de licenciatura y maestría. Por lo tanto, la mayoría de las definiciones y resultados en este campo matemático no serán abordados aquí. Sin embargo, esta sección está específicamente diseñada para presentar los resultados que serán utilizados posteriormente, con el único propósito de tenerlos disponibles cuando se requieran. Para una comprensión más detallada de la teoría de módulos, se recomienda consultar las referencias [2], [9] y [10].

Notación 2. *Sea A un anillo. Denotaremos como A-**Mod** a la categoría de A-**módulos izquierdos** y como **Mod**-A a la categoría de A-**módulos derechos**. Finalmente, usaremos la misma notación para sus homomorfismos, esto es, si $M, N \in \operatorname{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ ó $M, N \in \operatorname{Obj}(\boldsymbol{Mod}\text{-}A)$ entonces*

$$\operatorname{Hom}_A(M, N).$$

denotará el conjunto de A-homomorfismo de M a N. A menudo escribimos ${}_AM$ para denotar que M es un A-módulo izquierdo y M_A para denotar que M es un A-módulo derecho. Además escribiremos $M \in A\text{-}\boldsymbol{Mod}$ $[M \in \boldsymbol{Mod}\text{-}A]$, en lugar de $M \in \operatorname{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ $[M \in \operatorname{Obj}(\boldsymbol{Mod}\text{-}A)]$.

Lema 1.3.1. *Si $M, N \in \operatorname{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ [o si $M, N \in \operatorname{Obj}(\boldsymbol{Mod}\text{-}A)$], entonces el conjunto $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ es un grupo abeliano. Además, si $f, g \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$, $p : M' \longrightarrow M$ y $q : N \longrightarrow N'$ son A-homomorfismos, entonces*

$$(f+g) \circ p = f \circ p + g \circ p \quad y \quad q \circ (f+g) = q \circ f + q \circ g$$

Definición 1.3.2. *Un funtor $F : A\text{-}\boldsymbol{Mod} \longrightarrow \boldsymbol{Ab}$ de cualquier variante se llama **funtor aditivo** si para cada $f, g \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$, tenemos*

$$F(f+g) = F(f) + F(g).$$

Proposición 1.3.3. *Sea A un anillo, $M, N, K \in \operatorname{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ y $Z(A)$ el centro de A.*

- *(i)* $\operatorname{Hom}_A(M, \square)$ *es un funtor aditivo .*
- *(ii) Si $M \in A\text{-}\boldsymbol{Mod}$, entonces $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ es un $Z(A)$-módulo izquierdo, si $f \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$ y $a \in Z(A)$, definimos $af : M \longrightarrow N$ como $af(m) = f(am)$. Si $q \in \operatorname{Hom}_A(N, K)$, entonces el morfismo inducido $q_* : \operatorname{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, K)$ es un $Z(A)$-homomorfismo, y $\operatorname{Hom}_A(M, \square)$ toma valores en $Z(A)$-**Mod**. En particular si A es conmutativo, entonces $\operatorname{Hom}_A(M, \square)$ es un funtor A-**Mod** $\longrightarrow$ A-**Mod**. Donde $Z(A)$ es el centro de A-*

Proposición 1.3.4. *Sea A un anillo, y sean $M, N, K \in \operatorname{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$.*

- *(i)* $\operatorname{Hom}_A(\square, K)$ *es un funtor contravariante aditivo .*
- *(ii) Si $N \in A\text{-}\boldsymbol{Mod}$, entonces $\operatorname{Hom}_A(M, K)$ es un $Z(A)$-módulo izquierdo, si $f \in \operatorname{Hom}_A(M, K)$ y $a \in Z(A)$, definimos $af : M \longrightarrow N$ como $af(m) = f(am)$, para todo $m \in M$.*

  *Si $q \in \operatorname{Hom}_A(M, K)$, entonces el morfismo inducido $q_* : \operatorname{Hom}_A(N, K) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, K)$ es un $Z(A)$-homomorfismo, y $\operatorname{Hom}_A(\square, K)$ toma valores en $Z(A)$-**Mod**. En particular si A es conmutativo, entonces $\operatorname{Hom}_A(\square, K)$ es un funtor contravariante A-**Mod** $\longrightarrow$ A-**Mod***

Los dos resultandos de las proposiciones 1.3.3 y 1.3.4 nos dicen que los funtores Hom son aditivos. Ahora, si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor covariante, entonces para cada $M, N \in \operatorname{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ existe la funcion $F_{MN} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(M), F(N))$ dada por $F_{MN}(g) = F(g)$.

Si $F : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es un funtor aditivo, entonces cada F_{AB} es un homomorfismo de grupos: la afirmación análoga para funtores contravariantes es también cierta.

Proposición 1.3.5. *Sea $F : A\text{-}\boldsymbol{Mod} \longrightarrow \boldsymbol{Ab}$ un funtor aditivo de cualquier variante.*

(i) Si $0 : M \longrightarrow N$, es ***el morfismo cero****, entonces $F(0) = 0$.*

(ii) $F(\{0\}) = \{0\}$.

Definición 1.3.6. *Un A-módulo izquierdo M es* ***finitamente generado*** *si M es generado por un conjunto finito; esto es, si hay un conjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ con $M = \langle X \rangle$.*

Notación 3. *Si $M, N \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, entonces*

- *El núcleo de f se denota como:* $\mathrm{Nu}\,(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$,
- *La imagen de f se denota como:* $\mathrm{Im}\,(f) = \{n \in N : \text{ existe } m \in M, f(m) = n\}$,
- *El conúcleo de f se denota como:* $\mathrm{Conu}\,(f) = N/\,\mathrm{Im}(f)$.

Es meramente rutinario checar que $\mathrm{Nu}\,(f) \leq M$ *y que* $\mathrm{Im}\,(f) \leq N$.

Si $f : M \longrightarrow N$ es un A-homomorfismo y $K \subseteq N$, entonces $f^{-1}(K) = \{m \in M : f(m) \in K\}$ es un submódulo de M que contiene al $\mathrm{Nu}\,(f) = f^{-1}(\{0\})$.

Teorema 1.3.7 (Teorema de Correspondencia). *Si $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ y $K \in \mathcal{S}(M)$, entonces $\varphi : \{N \in \mathcal{S}(M) : K \subseteq N \subseteq M\} \longrightarrow \mathcal{S}(M/K)$ dada por $\varphi(N) = N/K$ es biyectiva. Es más, $K \subseteq N \subseteq N'$ en M si y solo si $N/K \subseteq N'/K$ en $M \subseteq K$.*

El teorema de correspondencia es usualmente usado como sigue: un submódulo N^* de M/K es igual a N/K para algún único submódulo intermedio K. En seguida anunciaremos la versión teórica para anillos.

Teorema 1.3.8 (Teorema de Correspondencia para Anillos). *Si I es un ideal bilateral de un anillo A, entonces la función $\varphi : \{J \in \mathcal{I}(A) : I \subseteq J \subseteq A\} \longrightarrow \mathcal{I}(A/I)$ dada por $\varphi(J) = J/I$ es biyectiva. Es más, $I \subseteq J \subseteq J'$ en A si y solo si $J/I \subseteq J'/I$ en $A \subseteq I$.*

Definición 1.3.9. *Para $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ se llama cíclico si existe $m \in M$ tal que $M = \langle m \rangle$.*

Proposición 1.3.10. *$M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ es cíclico si y solo si $M \cong A/I$, para algún $I \in \mathcal{I}(A)$.*

Definición 1.3.11. *Un A-módulo izquierdo M es* ***simple*** *(o* ***irreducible****) si $M \neq \{0\}$ y M no tienen submódulos propios no cero; esto es, $\{0\}$ y M son los únicos submódulos de M.*

Corolario 1.3.12. *Un A-módulo izquierdo M es simple si y solo si $M \cong A/I$, donde I es un ideal izquierdo maximal.*

Definición 1.3.13. *Un sucesión finita o infinita de A-homomorfismos y A-módulos izquierdos*

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

es llamada sucesión exacta si $\mathrm{Im}\,(f_{n+1}) = \mathrm{Nu}\,(f_n)$

Observe que no hay necesidad de etiquetar los morfimos $0 \xrightarrow{f} M$ o $N \xrightarrow{g} 0$: En cualquier caso, hay un único morfismo, a saber, $f : 0 \mapsto 0$ o el homomorfismo constante $g(n) = 0$ para todo $n \in N$.

Definición 1.3.14. *Una **sucesión exacta corta** es una sucesión exacta de la forma*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0.$$

Algunos autores llaman a esta extensión de K por M; algunos autores dicen que el módulo de en medio N es una extensión.

Definición 1.3.15. *Sean $\mathcal{A} = A$-**Mod** y $\mathcal{B} = B$-**Mod** y sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor covariante, sea $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow K \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de objetos de $\mathcal{A}$, entonces*

(1) *F es **semi-exacto** si $F(M) \longrightarrow F(N) \longrightarrow F(K)$ es exacto.*

(2) *F es **exacto izquierdo** si $0 \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(N) \longrightarrow F(K)$ es exacto.*

(3) *F es **exacto derecho** si $F(M) \longrightarrow F(N) \longrightarrow F(K) \longrightarrow 0$ es exacto.*

(4) *F es **exacto** si $0 \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(N) \longrightarrow F(K) \longrightarrow 0$ es exacto.*

Recordemos las definiciones de suma directa y producto directo sobre la categoría de A-**Mod**.

Definición 1.3.16. *Sea A un anillo y $(M_i)_{i\in I}$ una familia de A-módulos izquierdos, entonces su **suma directa** se define como:*

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \left\{(m_i)_{i\in I} : m_i \in M_i,\ \textit{tal que } m_i = 0 \textit{ para todo } i \in I \textit{ excepto un número finito de éstos}\right\}$$

junto con una familia de A-homomorfismo $\left\{\iota_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{j\in I} M_j\right\}_{i\in I}$ donde cada ι_i es la inclusión de M_i en la i-ésima coordenada de $\bigoplus_{i\in I} M_i$, cuya suma en $\bigoplus_{i\in I} M_i$ y producto por escalar están dados como siguen:

- $(m_i)_{i\in I} + (n_i)_{i\in I} = (m_i + n_i)_{i\in I}$,
- $a\,(m_i)_{i\in I} = (am_i)_{i\in I}$.

*Es fácil verificar que $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es un coproducto de la categoría A-**Mod**.*

Definición 1.3.17. *Sea A un anillo y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos izquierdos, entonces su **producto directo** se define como; $\prod_{\in I} M_i := \left\{(m_i)_{i\in I} : m_i \in M_i\right\}$, junto con una familia de A-homomorfismo*

$$\left\{\pi_i : \prod_{j\in I} M_i \longrightarrow M_j\right\}_{i\in I}$$

donde cada π_i es la proyección canónica de $\prod_{j\in I} M_i$ en M_i, cuya suma en $\prod_{i\in I} M_i$ y producto por escalar están dados como siguen:

- $(m_i)_{i\in I} + (n_i)_{i\in I} = (m_i + n_i)_{i\in I}$,
- $a\,(m_i)_{i\in I} = (am_i)_{i\in I}$.

*De hecho, $\prod_{i\in I} M_i$ es un producto de la categoría A-**Mod**.*

El siguiente teorema es muy utilizado en este trabajo.

Teorema 1.3.18 (Teorema del factor). *Sea $M, M', N, N' \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\textbf{Mod})$ y sea $f \in \mathrm{Hom}_A\,(M, N)$.*

(1) *Si* $g \in \operatorname{Hom}_A(M, M')$ *es un epimorfismo con* $\operatorname{Nu}(g) \subseteq \operatorname{Nu}(f)$, *entonces existe* $h \in \operatorname{Hom}_A(M', N)$ *único tal que* $f = h \circ g$. *Es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \\ M' \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Además, $\operatorname{Nu}(h) = g(\operatorname{Nu}(f))$ *y* $\operatorname{Im}(h) = \operatorname{Im}(f)$, *así que* h *es monomorfismo si y solo si* $\operatorname{Nu}(g) = \operatorname{Nu}(f)$ *y* h *es epimorfismo si y solo si* f *es epimorfismo.*

(2) *Si* $g \in \operatorname{Hom}_A(N', N)$ *es un monomorfismo con* $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Im}(g)$, *entonces existe* $h \in \operatorname{Hom}_A(M, N')$ *único tal que* $f = g \circ h$, *es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & N \\ N' \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Además, $\operatorname{Nu}(h) = \operatorname{Nu}(f)$ *y* $\operatorname{Im}(h) = g^{-1}(\operatorname{Im}(f))$, *así que* h *es monomorfismo si y solo si* f *es monomorfismo y* h *es epimorfismo si y solo si* $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(f)$.

Proposición 1.3.19. *Sean* $M, N \in \operatorname{Obj}(\mathbb{Z}\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *y* $A, B, C \in$ ***Anillos***. *Entonces la estructura de anillo*

(1) ${}_AM_B$, ${}_AN_C$ *induce una estructura de* (B, C)*-bimódulo a* $Hom_A(M, N)$ *mediante*

$$(bf)(x) = f(xb) \text{ y } (fc)(x) = f(x)c;$$

(2) ${}_BM_A$, ${}_CN_A$ *induce una estructura de* (C, B)*-bimódulo a* $Hom_A(M, N)$ *mediante*

$$(cf)(x) = cf(x) \text{ y } (fb)(x) = f(bx).$$

1.3.2. Producto Tensorial

El producto directo toma un papel importante en este trabajo, por lo que se considera indispensable tener la construcción de este concepto.

Definición 1.3.20. *Sea* A *un anillo,* M_A *un* A*-módulo derecho,* ${}_AN$ *un* A*-módulo izquierdo y* G *un grupo abeliano. Una función* $f : M \times N \longrightarrow G$ *se llama* A***-biaditiva*** *si, para cada* $m, m' \in M, n, n' \in N$, *y* $a \in A$, *tenemos:*

- $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$,
- $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$,
- $f(ma, n) = f(m, an)$.

Si A *es conmutativo y* M, N, K *son* A*-módulos, entonces una función* $f : M \times N \longrightarrow K$ *se llama* A***-bilineal*** *si* f *es* A*-biaditiva y también*

- $f(mr, n) = rf(m, n) = f(m, rn)$.

El producto tensorial convierte funciones A-biaditivas en A-homomorfismos.

Definición 1.3.21. *Dado un anillo* A, *un* A*-módulo derecho* M_A *y un* A*-módulo izquierdo* ${}_AN$, *su* ***producto tensorial*** *es un grupo abeliano* $M \otimes_A N$ *y una función* A*-biaditiva*

$$h : M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$$

tal que, par cada grupo abeliano G *y cada función* A*-biaditiva* $f : M \times N \longrightarrow G$ *existe un único* $\mathbb{Z}$*-homomorfismo* $\tilde{f} : M \otimes_A N \longrightarrow G$ *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & G \\ M \otimes_A N \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Sabemos que el producto tensorial entre M_A y ${}_AN$ existe, y es único salvo isomorfismos. Sin embargo, necesitamos desglosar su construcción pues lo ocuparemos en algún punto de este proyecto. Para ello, sea F un grupo abeliano libre con base $M \times N$; esto es, F es libre en todos los pares ordenados (m, n) donde $m \in M$ y $n \in N$, se define en el subgrupo S de F generado por todos los elementos de los siguientes tres tipos:

$$\begin{aligned}(m, n + n') - (m, n) - (m, n')\\(m + m', n) - (m, n) - (m', n)\\(mr, n) - (m, rn)\end{aligned}$$

El cociente F/S junto con $h : M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$ que está dado por $h(m, n) = m \otimes n$ para cada $(m, n) \in M \times N$, es el producto tensorial entre $M \otimes N$. A las clases $(m, n) + S$ se denotan como $m \otimes n$. Tenemos las siguientes:

$$\begin{aligned}&m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'\\&(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n\\&(mr) \otimes n = m \otimes (rn)\end{aligned}$$

Observación 1.3.22. *Ya que $M \otimes_A N$ es generado por los elementos de la forma $m \otimes n$, cada $u \in M \otimes_A N$ tiene la forma*

$$u = \sum_i m_i \otimes n_i$$

Esta expresión de u no es única; por ejemplo, para cero hay expresiones

$$\begin{aligned}0 &= m \otimes (n + n') - m \otimes n - m \otimes n',\\0 &= (m + m') \otimes n - m \otimes n - m' \otimes n,\\0 &= (mr) \otimes n - m \otimes (rn).\end{aligned}$$

Proposición 1.3.23. *Sea $f : M_A \longrightarrow M'_A$ y $g :_A N \longrightarrow_A N'$ homomorfimos de A-módulos derechos e izquierdos, respectivamente. Entonces hay un único $\mathbb{Z}$-módulos, denotado por $f \otimes g : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N'$ con*

$$f \otimes g : m \otimes n \longrightarrow f(m) \otimes g(n).$$

Dem.
La función $\varphi : M \times N \longrightarrow M' \otimes_A N'$ dada por $\varphi(m, n) = f(m) \otimes g(n)$ es A-biaditiva, es fácil comprobarlo, así, existe un único homomorfismo $M \otimes_A N \longrightarrow M' \otimes_A N'$ dada por $m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)$

Q.E.D

Corolario 1.3.24. *Dado homomorfismos de A-módulos derechos $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M''$ y homomorfimos de A-módulos izquierdos $N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N''$,*

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g).$$

Dem.
Ambos homomorfismos mandan $m \otimes n$ a $f' \circ f(m) \otimes g' \circ g(n)$ y así la unicidad nos da lo que queremos.

Q.E.D

Teorema 1.3.25. *Dado M_A hay un funtor aditivo $F_M :_A \boldsymbol{Mod} \longrightarrow \boldsymbol{Ab}$, definido por*

$$F_M(N) = M \otimes_A N \text{ y } F_M(g) = \mathrm{id}_M \otimes g,$$

donde $g : N \longrightarrow N'$ es un homomorfismo de A-módulos izquierdos. Similarmente, dado ${}_AN$ hay un funtor aditivo $G_N : \boldsymbol{Mod}_A \longrightarrow \boldsymbol{Ab}$ definido por

$$F_N(M) = M \otimes_A N \text{ y } F_M(g) = f \otimes \mathrm{id}_N,$$

donde $f : M \longrightarrow M'$ es homomorfismo de A-módulos derechos.

Notación: Denotaremos el funtor F_M por $M \otimes_A \square$ y al funtor G_N por $\square \otimes_A N$.

Corolario 1.3.26. *Si $f : M \longrightarrow M'$ y $g : N \longrightarrow N'$ son isomorfismos de A-módulos derechos e izquierdos, respectivamente. Entonces $f \otimes g : M \otimes_A N \longrightarrow M' \otimes_A N'$ es un isomorfismos de grupos abelianos.*

En general, el producto tensorial de dos módulos es solo un grupo abeliano; en caso de que sea un módulo, los funtores producto tensorial toman valores en una categoría de módulos, no simplemente en **Ab**. La noción de bimódulo generalmente responde a tales preguntas.

Definición 1.3.27. *Sean A, B anillos y sea M un grupo abeliano. Entonces M es un (A, B)-**bimódulo**, denotado como ${}_AM_B$, sí M es un A-módulo izquierdo y un B-módulo derecho, y se cumple la ley de asociación: $\forall a \in A, m \in M, \in B$*

$$a(mb) = (am)b.$$

Si M es un (A, B)-bimódulo, está permitido escribir amb, pues la ley de asociación previa nos dice que las dos posibles asociaciones concuerdan.

La siguiente proposición usa el producto tensorial para extender los escalares.

Proposición 1.3.28. ***(Extensión de escalares)*** *Sea S un subanillo de un anillo A.*

(i) *Dado un bimodulo ${}_AM_S$ y un S-módulo izquierdo ${}_SN$, entonces el producto tensorial $M \otimes_S N$ es un A-módulo izquierdo, donde*

$$a\,(m \otimes n) = (am) \otimes n.$$

Similarmente, dado un S-módulo derecho M_S y un (S, A)-bimódulo N, el producto tensorial $M \otimes_S N$ es un A-módulo derecho, donde

$$(m \otimes n)\,a = m \otimes (na)\,.$$

(ii) *El anillo A es un (A, S)-bimódulo y, si M es un S-módulo izquierdo, entonces $A \otimes_S M$ es un A-módulo izquierdo.*

Corolario 1.3.29. *Las afirmaciones siguientes se cumplen:*

(i) *Dado un bimódulo ${}_SM_A$, el funtor $M \otimes_A \square : A$-**Mod** $\longrightarrow$ **Ab** define un funtor de A-**Mod** a S-**Mod**.*

(ii) *Si A es un anillo, entonces $M \otimes_A N$ es un $Z(A)$-módulo, donde*

$$a\,(m \otimes n) = (am) \otimes n = m \otimes (an)\,,$$

para todo $a \in Z(A)$, $m \in M$, y $n \in N$.

(iii) *Si A es un anillo, $a \in Z(A)$ y $\mu_a : N \longrightarrow N$ es la multiplicación por a, entonces*

$$\mathrm{id}_M \otimes \mu_a : M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N$$

es también multiplicación por a.

Cuando uno de los módulos es un bimódulo, Hom también tiene estructura extra y son descritas en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.30. *Sea A y S anillos.*

(i) *Dado ${}_AM_S$ y ${}_AN$, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es un S-módulo izquierdo, donde $sf : m \mapsto f(ms)$, y $\mathrm{Hom}_A(M, \square)$ es un funtor A-**Mod** $\longrightarrow S$-**Mod**.*

(ii) *Dado ${}_AM_S$ y N_S, entonces $\mathrm{Hom}_S(M, N)$ es un A-módulo derecho, donde $fa : m \mapsto f(am)$, y $\mathrm{Hom}_S(M, \square)$ es un funtor **Mod**-$S \longrightarrow$ **Mod**-A.*

(iii) *Dado ${}_SN_A$ y M_A, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es un S-módulo izquierdo, donde $sf : m \mapsto s[f(m)]$, y $\mathrm{Hom}_A(\square, N)$ es un funtor **Mod**-$A \longrightarrow S$-**Mod**.*

(iv) *Dado ${}_SN_A$ y ${}_SM$, entonces $\mathrm{Hom}_S(M, N)$ es un A-módulo derecho, donde $fa : m \mapsto f(m)a$, y $\mathrm{Hom}_S(M, \square)$ es un funtor S-**Mod** $\longrightarrow$ **Mod**-A.*

1.3.3. Límite Directo

En este trabajo nos interesa los límites directos en la categoría A-**Mod** que sabemos siempre existen, sin embargo, este concepto es uno de los ingredientes principales que usamos a lo largo de toda la investigación, por lo que es muy importante tener a la mano el constructo de fondo. Con esta finalidad, enseguida se dará un resumen de este concepto, y en especial sobre la categoría A-**Mod**.

Definición 1.3.31. *Un COPO $(\Delta, \leq)$ se llama **conjunto dirigido** si para cada pareja $i, j \in \Delta$, existe $k \in \Delta$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.*

Definición 1.3.32. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea Δ es un conjunto dirigido y $(X_i)_{i\in\Delta}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$ indexadas por Δ y para cada $i, j \in \Delta$ con $i \leq j$, sea $f_{i,j} : X_i \longrightarrow X_j$ morfismo. $(X_i, f_{i,j})$ es un **sistema directo** en $\mathcal{C}$ si se cumple:*

- *$f_{i,i} = 1_{X_i}$, para cada $i \in \Delta$.*
- *$f_{i,k} = f_{j,k} \circ f_{i,j}$, para cada $i, j, k \in \Delta$ con $i \leq j \leq k$.*

Dado un sistema directo $(X_i, f_{i,j})$, definamos

$$\Omega(X_i, f_{i,j}) := \big\{ (X, \{\phi_i : X_i \longrightarrow X\}) : X \in \mathcal{C} \text{ y para cada } i, j \in \Delta \text{ con } i \leq j,\ \phi_i = \phi_j \circ f_{i,j} \big\}.$$

Definición 1.3.33. *Sea $(X_i, f_{i,j})$ un sistema directo de una categoría $\mathcal{C}$. Un par $(X, \{\phi_i\}) \in \Omega(X_i, f_{i,j})$ se llama **límite directo** de $(X_i, f_{i,j})$, si cumple la siguiente propiedad universal: Para cada par $(Y, \{\psi_i\}) \in \Omega(X_{i,j}, f_{i,j})$, existe un único morfismo $\upsilon : X \longrightarrow Y$ tal que para cada $i \leq j$ (en Δ) el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f_{i,j}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, "\upsilon"] & \\
& Y &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Sabemos que cuando el límite directo de un sistema directo existe, entonces es único salvo isomorfismos. Ahora, si $(X_i, f_{i,j})$ es un sistema directo y el límite directo de este sistema existe, entonces lo denotaremos como:

$$\varinjlim_{i\in\Delta}(X_i) = \varinjlim(X_i)$$

Consideremos un sistema directo $(M_i, \alpha_{i,j})$ en A- **Mod**. Y sea

$$\widehat{M} = \bigsqcup_{i\in\Delta} \big(M_i \times \{i\}\big).$$

La siguiente relación $\sim$ en $\widehat{M}$ es de equivalencia:

$$(x, i) \sim (y, j) \text{ en } \widehat{M} \iff \text{ existe } k \in \Delta \text{ tal que } i \leq k,\ j \leq k \text{ y } \alpha_{i,k}(x) = \alpha_{j,k}(y).$$

La relación $\sim$ nos permite darle a $X = \widehat{M}/\sim$ estructura de A-módulo izquierdo con las siguientes operaciones: sean $[(x, i)], [(y, j)] \in X \times X$ y $a \in A$

$$\textbf{Suma: } [(x, i)] + [(y, j)] = \big[(\alpha_{i,k}(x) + \alpha_{j,k}(y), k)\big], \text{ donde } i, j \leq k.$$
$$\textbf{Producto: } a \cdot [(x, i)] = \big[(ax, i)\big].$$

Esto es $(X,+,\cdot) \in \operatorname{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$. Ahora, para cada $i \in \Delta$ sea $\phi_i : M_i \longrightarrow X$ dado por $\phi_i(x) = [(x,i)]$. Tenemos que ϕ_i es un A-homomorfismo. Y para cada $i,j \in \Delta$ con $i \leq j$ se tiene que $\phi_i = \phi_j \circ \alpha_{i,j}$, en otras palabras $(X,\{\phi_i\}) \in \Omega(M_i,\{\alpha_{i,j}\})$. De hecho, $(X,\{\phi_i\})$ es el límite directo de $(X_i,\alpha_{i,j})$, esto es,

$$X = \varinjlim(M_i)$$

Observación 1.3.34. *Cada elemento en X tiene la forma $[(x,i)]$ para algún $i \in \Delta$, es decir, $\phi_i(x) = [(x,i)]$, $x \in M_i$. Diremos que x representa a $[(x,i)]$.*

■ **Ejemplo 1.3.35.** *Sea $\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_n \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$ una sucesión de A-homomorfimos, donde $i \in \mathbb{Z}$. Sabemos que $(\mathbb{Z},\leq)$ es un conjunto dirigido donde $\leq$ es el orden usual. Ahora, para cada $i,j \in \mathbb{Z}$ con $i \leq i$ sea $f_{i,j} := f_{j-1} \circ \cdots \circ f_i$ si $i \neq j$ y si $i = j$, entonces $f_{i,i} := \mathrm{id}_{M_i}$. El par $(M_i, M_{i,j})$ es un sistema directo, pues si $i \leq j \leq k$, entonces $f_{i,k} = f_{k-1} \circ \cdots f_j \circ f_{j-1} \circ \cdots \circ f_i = f_{j,k} \circ f_{i,j}$. Por lo tanto, el límite directo $\varinjlim_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ existe y es A-módulo izquierdo, donde para cada $i \in \mathbb{Z}$, $\phi_i : M_i \longrightarrow \varinjlim M_i$ esta dado $\phi_i(m_i) = [(m_i,i)]$. Se llamará **límite directo asociado a la sucesión**.*

Observación 1.3.36. *Si $[(m_i,i)] \in \varinjlim M_i$, entonces para todo $k \geq i$ se cumple que*

$$[(m_i,i)] = [(f_{i,k}(m_i),k)],$$

pues $f_{i,k}(m_i) = f_{k,k}(f_{i,k}(m_i))$.

■ **Ejemplo 1.3.37.** *Sea $\cdots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \longrightarrow \cdots$ una sucesión de homomorfismos de anillos. Entonces $\varinjlim_{i\in\mathbb{Z}} A_i \in \mathbb{Z}$-**Mod** es un anillo con producto $* : \varinjlim A_i \times \varinjlim M_i \longrightarrow \varinjlim M_i$ dada por:*

$$[(x_i,i)] * [(x_j,j)] = [(f_{i,k}(x_i)f_{j,k}(x_j),k)] \text{ donde } i \leq k \text{ y } j \leq k$$

Capítulo 2

Teorías de torsión y prerradicales

El estudio y análisis profundo de la teoría de torsión requiere una exploración exhaustiva de las fuentes y referencias pertinentes. En el caso que nos ocupa, la investigación se ha enriquecido gracias a la consulta de diversas fuentes de renombre. Entre ellas, destacan como referencia principal [10] al igual que [3], [4], [5], [6] y [8], las cuales proporcionan una visión comprensiva y detallada sobre el tema en cuestión. Estos estudios han aportado perspectivas variadas y enriquecedoras que contribuyen significativamente al entendimiento global del asunto abordado. En este capítulo se exponen los conceptos y resultados esenciales que son tanto necesarios como suficientes para comprender la investigación doctoral, especialmente en lo que respecta a establecer la notación que se empleará al usar estos conceptos.

2.1. Prerradicales y teorías de torsión

Definición 2.1.1. *Un prerradical sobre A-$\boldsymbol{Mod}$ es una asociación $r : A\text{-}\boldsymbol{Mod} \longrightarrow A\text{-}\boldsymbol{Mod}$ tal que*

(1) *Para todo $M \in \operatorname{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$, $r(M) \leq M$.*

(2) *Si $f \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$,entonces $f(r(M)) \leq r(N)$.*

Denotaremos a la clase de prerradicales como $A\text{-pr} = \{r : r \text{ es prerradical}\}$

Proposición 2.1.2. *Sea $r \in A$-pr. Sí $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es una familia de A-módulos izquierdos, entonces,*

(1) $r\left(\prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha\right) \leq \prod_{\alpha\in\Delta} r(M_\alpha)$.

(2) $r\left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha\right) = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} r(M_\alpha)$.

Definición 2.1.3. *Dado una colección $\{r_i\}_{i\in I}$ de prerradicales sobre A- $\boldsymbol{Mod}$, consideramos las siguientes asignaciones para cada $M \in A$- $\boldsymbol{Mod}$:*

$$\left(\bigvee_{i\in I} r_i\right)(M) := \sum_{i\in I} r_i(M),$$

$$\left(\bigwedge_{i\in I} r_i\right)(M) := \bigcap_{i\in I} r_i(M).$$

A-pr es una **gran retícula completa**. A cada $r \in A$-pr le asociaremos dos clases de A-módulos izquierdos.

(a) $\mathbb{T}_r := \{M \in_A \mathbf{Mod} : r(M) = M\}$

(b) $\mathbb{F}_r := \{M \in_A \mathbf{Mod} : r(M) = 0\}$

Definición 2.1.4. *Dada una clase $\mathcal{C} \subseteq A$-**Mod**. Se dice que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo*

(1) *monomorfismos, si $N \in \mathcal{C}$ y $M \rightarrowtail N$, entonces $M \in \mathcal{C}$.*

(2) *epimorfismos, si $M \in \mathcal{C}$ y $M \twoheadrightarrow N$, entonces $N \in \mathcal{C}$.*

(3) *sumas directas, si $\{M_i\}_{i\in I}$, entonces $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \mathcal{C}$.*

(4) *productos directos, si $\{M_i\}_{i\in I}$, entonces $\prod\limits_{i\in I} M_i \in \mathcal{C}$.*

(5) *extensiones, si $0 \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow 0$ sucesión exacta y $M, N \in \mathcal{C}$, entonces $K \in \mathcal{C}$.*

Definición 2.1.5. *Dada una clase $\mathcal{C} \subseteq A$-**Mod**. Se dice que;*

(1) *$\mathcal{C}$ es de **pretorsión** si es cerrado bajo epimorfismos y sumas directas.*

(2) *$\mathcal{C}$ es **pre-libre de torsión** si es cerrado bajo monomorfismos y productos directos.*

(3) *$\mathcal{C}$ es de **torsión** si es de pretorsión y cerrado bajo extensiones.*

(4) *$\mathcal{C}$ es de **libre de torsión** si es pre-libre de torsión y cerrado bajo extensiones.*

Definición 2.1.6. *Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ y $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$, definimos la traza de M como:*

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}}(M) = \sum_{C\in\mathcal{C}} \sum_{f\in \mathrm{Hom}_A(C,M)} \mathrm{Im}(f) = \sum \{\mathrm{Im}(f) : f \in \mathrm{Hom}_A\,(C, M)\,, C \in \mathcal{C}\}.$$

Definición 2.1.7. *Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ y $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$, definimos el rechazo de M como:*

$$\mathrm{Rej}_{\mathcal{C}}(M) = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} \bigcap_{g\in \mathrm{Hom}_A(M,C)} \mathrm{Nu}(g) = \bigcap \{\mathrm{Nu}(g) : g \in \mathrm{Hom}_A\,(M, C)\,, C \in \mathcal{C}\}.$$

Proposición 2.1.8. $\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}}, \mathrm{Rej}_{\mathcal{C}} \in A$-*pr*.

Definición 2.1.9. *$r \in A$-pr se llama **idempotente** si para todo $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$, $r(r(M)) = r(M)$ y se llama **radical** si para todo $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$, $r\left(\frac{M}{r(M)}\right) = 0$.*

Definición 2.1.10 (Dickson, 1964)**.** *Una teoría de torsión sobre A-**Mod** es una pareja $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ tales que $\mathbb{T}, \mathbb{F} \subseteq \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ y cumplen:*

(1) *$\mathbb{T} \cap \mathbb{F} = 0$,*

(2) *$\mathbb{T}$ es cerrado bajo epimorfismos.*

(3) *$\mathbb{F}$ es cerrado bajo monomorfismos.*

(4) *Para cada $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$, existe $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ sucesión exacta, con $N \in \mathbb{T}$ y $L \in \mathbb{F}$.*

Proposición 2.1.11. *una pareja* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *tales que* $\mathbb{T}, \mathbb{F} \subseteq \operatorname{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *es una teoría de torsión si y solo si*

(1) *Para cada* $M \in \mathbb{T}, N \in \mathbb{F}$, $\operatorname{Hom}_A(M, N) = 0$. *(**Ortogonalidad ó independencia homológica**).*

(2) $\mathbb{T}, \mathbb{F}$ *son cerrados bajo isomorfismos.*

(3) *Para cada* $M \in \operatorname{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$, *existe* $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ *sucesión exacta, con* $N \in \mathbb{T}$ *y* $L \in \mathbb{F}$.

Definición 2.1.12. *Dada* $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$, *se define las siguientes clases de módulos:*

- $R(\mathcal{C}) = \{N \in A\text{-}\boldsymbol{Mod} : \forall C \in \mathcal{C}, \operatorname{Hom}_A(C, N) = 0\}$,
- $L(\mathcal{C}) = \{M \in A\text{-}\boldsymbol{Mod} : \forall C \in \mathcal{C}, \operatorname{Hom}_A(M, C) = 0\}$.

Proposición 2.1.13 (Definición alternativa de teoría de torsión)**.** *una pareja* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *tales que* $\mathbb{T}, \mathbb{F} \subseteq \operatorname{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *es una teoría de torsión si y solo si*

(1) $R(\mathbb{T}) = \mathbb{F}$,

(2) $R(\mathbb{F}) = \mathbb{T}$.

Proposición 2.1.14. *Los operadores* R *y* L *tienen las siguientes propiedades:*

(1) *Para cada* $\mathcal{C} \subseteq A\text{-}\boldsymbol{Mod}$, $\mathcal{C} \subseteq LR(\mathcal{C})$,

(2) *Para cada* $\mathcal{C} \subseteq A\text{-}\boldsymbol{Mod}$, $\mathcal{C} \subseteq RL(\mathcal{C})$,

(3) $LRL = L$, *es decir,* $\forall\ \mathcal{C} \subseteq A\text{-}\boldsymbol{Mod}$, $lRL(\mathcal{C}) = L(\mathcal{C})$,

(4) $RLR = R$, *es decir,* $\forall\ \mathcal{C} \subseteq A\text{-}\boldsymbol{Mod}$, $RLR(\mathcal{C}) = R(\mathcal{C})$,

(5) R *invierte el orden:* $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq A\text{-}\boldsymbol{Mod}$ $[\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow R(\mathcal{D}) \subseteq R(\mathcal{C})]$,

(6) L *invierte el orden:* $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq A\text{-}\boldsymbol{Mod}$ $[\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow L(\mathcal{D}) \subseteq L(\mathcal{C})]$,

(7) $(LR(\mathcal{C}), R(\mathcal{C}))$ *es teoría de torsión (generado por* $\mathcal{C}$*),*

(8) $(L(\mathcal{C}), RL(\mathcal{C}))$ *es teoría de torsión (cogenerada por* $\mathcal{C}$*).*

Proposición 2.1.15. *Si* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *es una teoría de torsión, entonces:*

(1) $\mathbb{T}$ *es una clase de torsión.*

(2) $\mathbb{F}$ *es una clase libre de torsión.*

Proposición 2.1.16. (1) *Si* $\mathbb{T}$ *es una clase de torsión, entonces* $LR(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$.

(2) *Si* $\mathbb{F}$ *es una clase de torsión, entonces* $LR(\mathbb{F}) = \mathbb{F}$.

Corolario 2.1.17. *Dadas* $\mathbb{T}, \mathbb{F} \subseteq A\text{-}\boldsymbol{Mod}$*:*

(1) $\mathbb{T}$ *es una clase se torsión si y solo si existe* $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *tal que* $(\mathbb{T}, \mathcal{D})$ *es una teoría de torsión.*

(2) $\mathbb{F}$ *es una clase se torsión si y solo si existe* $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *tal que* $(\mathcal{C}, \mathbb{F})$ *es una teoría de torsión.*

Proposición 2.1.18. *Si* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *es una teoría de torsión, entonces* $\mathrm{Tr}_{\mathbb{T}} = \mathrm{Rej}_{\mathbb{F}}$ *y en particular es un radical idempotente.*

Proposición 2.1.19. *Si* r *es un radical idempotente, entonces* $(\mathbb{T}_r, \mathbb{F}_r)$ *es una teoría de torsión.*

Proposición 2.1.20. *Para* $r \in A\text{-}\mathrm{pr}$ *son equivalentes:*

(*a*) r *es exacto izquierdo.*

(*b*) *Para todo* $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *y* $N \leq M$, $r\,(N) = N \cap r\,(M)$.

(*c*) r *es idempotente y* $\mathbb{T}_r$ *es cerrado bajo monomorfismos.*

Lema 2.1.21. *Si* r *es radical y* $N \leq M$ *con* $M \in A \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *es tal que* $N \leq r(M)$*, entonces* $r\,(M/N) = r(M)/N$.

Corolario 2.1.22. *Hay una correspondencia biunívoca entre prerradicales exactos izquierdos y clases de pretorsión hereditarios (cerrados bajo monos).*

Proposición 2.1.23. *Para* $r \in A\text{-}\mathrm{pr}$ *las siguientes son equivalentes:*

(*a*) r *preserva epimorfismos.*

(*b*) *Para cada* $M \in A\text{-}\boldsymbol{Mod}$, $r(M) = r(A)M$.

(*c*) r *es radical y* $\mathbb{F}_r$ *es cerrada bajo epimorfismos (es cohereditaria).*

A los radicales que cumplen esto se les llama ***t-radicales****.*

Proposición 2.1.24. *Dada una teoría de torsión* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *son equivalentes:*

(*a*) $\mathbb{T}$ *es hereditaria, es decir, es cerrada bajo monomorfismos.*

(*b*) $\mathbb{F}$ *es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Proposición 2.1.25. *Dada una teoría de torsión* $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *son equivalentes:*

(*a*) $\mathbb{T}$ *es hereditaria.*

(*b*) *Existe un* A*-módulo inyectivo* Q *tal que* $\tau = (L(Q), RL(Q))$ *(donde* $L(Q) := L(\{Q\})$*).*

Proposición 2.1.26. *Para dos* A*-módulos inyectivos* Q_1, Q_2 *son equivalentes:*

(*a*) $L(Q_1) = L(Q_2)$.

(*b*) Q_1 *y* Q_2 *se cogeneran mutuamente, es decir:*

$$Q_2 \text{ cogenera a } Q_1 : \text{ existe } Q_1 \rightarrowtail Q_2^X$$
$$Q_1 \text{ cogenera a } Q_2 : \text{ existe } Q_2 \rightarrowtail Q_1^Y$$

2.2. Filtros lineales y filtros de Gabriel

Definición 2.2.1. *Sea* $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{I}(A)$ *no vacío.* $\mathcal{L}$ *es un* ***filtro lineal*** *si cumple lo siguiente:*

(1) *Si* $I, J \in \mathcal{I}(A)$ *con* $I \leq J$ *y* $I \in \mathcal{L}$*, entonces* $J \in \mathcal{L}$.

(2) *Si* $I, J \in \mathcal{L}$*, entonces* $I \cap J \in \mathcal{L}$.

(3) *Si* $I \in \mathcal{L}$*,* $a \in A$*, entonces* $(I : a) \in \mathcal{L}$.

donde $(I : a) = \{x \in A : xa \in I\} = \operatorname{ann}(a + I)$ *es el ideal trasladado de* I *a través de* ***a***.

Proposición 2.2.2. *Dado un filtro lineal* $\mathcal{L}$*, la clase* $\mathbb{T}_{\mathcal{L}} = \{M : \forall m \in M, \operatorname{ann}(m) \in \mathcal{L}\}$ *de* A*-módulos es de pretorsión hereditaria.*

Proposición 2.2.3. *Dada una clase de pretorsión hereditaria* $\mathbb{T}$*, la familia* $\mathcal{L}_{\mathbb{T}} = \{I \in \mathcal{I}(A) : A/I \in \mathbb{T}\}$ *es un filtro lineal.*

Proposición 2.2.4. *Las asignaciones:*

$$\varphi : A\text{-}\boldsymbol{fil} \longrightarrow A\text{-}\boldsymbol{pretorh}, \text{ dada por } \varphi(\mathcal{L}) = \mathbb{T}_{\mathcal{L}},$$
$$\psi : A\text{-}\boldsymbol{pretorh} \longrightarrow A\text{-}\boldsymbol{fil}, \text{ dada por } \psi(\mathbb{T}) = \mathcal{L}_{\mathbb{T}},$$

son inversos entre si y por tanto, constituyen una correspondencia biunívoca.

Observaciones 2.2.5. (a) *Dichas asignaciones son morfismos de COPOS (preservan el orden de la contención) y por lo tanto, isomorfismos de COPOS.*

(b) *Como A-**fil** es un conjunto, pues A-**fil*** $\subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *que es un conjunto y por lo tanto A-**pretorsh** también es un conjunto, con la misma cardinalidad y también A-**preradh**.*

Definición 2.2.6. *Sea* $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{I}(A)$ *no vacío.* $\mathcal{G}$ *es un* ***filtro de Gabriel*** *(topología de Gabriel) si cumple lo siguiente:*

(i) *Si* $I \in \mathcal{G}$*,* $a \in A$*, entonces* $(I : a) \in \mathcal{G}$

(ii) *Si* $I, J \in \mathcal{I}(A)$ *tales que* $I \in \mathcal{G}$ *y para cada* $a \in I$*,* $(J : a) \in \mathcal{G}$*, entonces* $J \in \mathcal{G}$

Proposición 2.2.7. *Todo filtro de Gabriel es filtro lineal.*

Proposición 2.2.8. *Si* $\mathcal{L}$ *es un filtro de Gabriel, entonces* $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}$ *es una clase de torsión hereditaría.*

Proposición 2.2.9. *Si* $\mathbb{T}$ *es una clase de torsión hereditaría, entonces* $\mathcal{L}_{\mathbb{T}}$ *es un filtro de Gabriel.*

Se concluye que existe una correspondencia biunívoca (isomorfismo de copos) entre filtros de Gabriel y clases de torsión hereditarias y por lo tanto radicales exactos izquierdos y teorías de torsión hereditarios y clases de equivalencias de módulos inyectivos y clases de torsión cerrados bajo cápsulas inyectivos.

Capítulo 3

Módulos de cocientes sobre filtros de Gabriel

El propósito exclusivo de este capítulo es proporcionar una descripción detallada del origen del proyecto de investigación. Para lograrlo, se aborda cada etapa de manera exhaustiva. Aunque es posible condensar este contenido de manera significativa, se optó por incluirlo en este trabajo dada la ausencia de literatura específica que aborde la construcción detallada de este proceso. Asimismo, se puede considerar como una contribución a la didáctica de este tema. Sin embargo, la referencia principal de este capitulo es [10].

3.1. Anillo de fracciones

Con el propósito de estimular la comprensión del concepto de anillo de fracciones, consideremos y mantengamos presente el proceso de construcción del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$.

3.1.1. Campo de fracciones de $\mathbb{Z}$

Sea $S := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Definamos en $S \times \mathbb{Z}$ la siguiente relación:

$$(s, a) \backsim (t, b) \iff at - sb = 0.$$

Proposición 3.1.1. *$\backsim$ es una relación de equivalencia.*

Dem.
Sean $(s, a), (t, b), (u, c) \in S \times \mathbb{Z}$.

(i) En $\mathbb{Z}$, $as - sa = 0$, entonces $(s, a) \backsim (s, a)$. Por lo tanto, $\backsim$ es reflexiva.

(ii) Supongamos que $(s, a) \backsim (t, b)$. Entonces $at - sb = 0$. Como $\mathbb{Z}$ es conmutativo se sigue que $bs - ta = -(at - sb) = -0 = 0$, esto implica que $(t, b) \backsim (s, a)$. Por lo tanto, $\backsim$ es simétrica.

(iii) Supongamos que $(s, a) \backsim (t, b)$ y $(t, b) \backsim (u, c)$. Entonces $at = sb$ y $bu = tc$. Por se $\mathbb{Z}$ conmutativo se sigue que $(au)t = (ua)t = u(at) = u(sb) = (us)b = (su)b = s(ub) = s(tc) = s(ct) = (sc)t$

$$\implies \quad t(au - sc) = 0 \implies \quad au = sc \text{ (pues, } t \neq 0) \quad \implies \quad (s, a) \backsim (u, c)$$

Por lo tanto, $\backsim$ es transitiva.

De (i), (ii) y (iii) se concluye que $\backsim$ es una relación de equivalencia.

Q.E.D

Ahora, definamos $\mathbb{Q} := S \times \mathbb{Z}/ \backsim$, es decir, $\mathbb{Q}$ es el conjunto de clases de equivalencia de $S \times \mathbb{Z}$ mediante la relación $\backsim$. Por convención, cada $[(s, a)] \in \mathbb{Q}$ generalmente se denota como $\dfrac{a}{s}$. El conjunto $\mathbb{Q}$ tiene estructura de anillo con las siguientes operaciones: $+, \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ donde,

- $[(s,a)]+[(t,b)] := [(st, at+sb)]$,
- $[(s,a)]\cdot[(t,b)] := [(st, ab)]$.

Esto es, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ es un anillo. Más aún, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ es un campo. Durante la construcción de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ nos damos cuenta que las propiedades de $\mathbb{Z}$ y del conjunto $S=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ fue lo que permitió hacer la construcción de $\mathbb{Q}$ y estas propiedades no dependen estrictamente de los conjuntos que hemos elegido, las propiedades son las siguientes:

- $\mathbb{Z}$ es un anillo.
- $1\in S$ y para cada $x,y\in S$, $xy\in S$.

Estas características nos permiten dar un primer salto a los anillos conmutativos, además de introducir el concepto de general de conjunto multiplicativo.

Definición 3.1.2. *Sea A un anillo (no necesariamente conmutativo) y $S\subseteq A$. Diremos que S es un **conjunto multiplicativo** si se cumple:*

(*a*) $1\in S$

(*b*) *Para todo $x,y\in S$, $xy\in S$.*

3.1.2. Anillos de fracciones sobre anillos conmutativos

Dado un anillo conmutativo A y $S\subseteq A$ un conjunto multiplicativo, definimos en $S\times A$ las siguiente relación:

$$(s,a)\backsim(t,b) \iff \text{existe } u\in S \text{ tal que } u(at-sb)=0.$$

Proposición 3.1.3. *$\backsim$ es una relación de equivalencia.*

Dem.
Sean $(s,a),(t,b),(f,e)\in S\times A$.

(*i*) Dado que para toda $u\in S$, $u(as-sa)=0$, pues A es conmutativo. Entonces $(s,a)\backsim(s,a)$. Por lo tanto, $\backsim$ es reflexiva.

(*ii*) Supongamos que $(s,a)\backsim(t,b)$. Entonces existe $u\in S$ tal que $u(at-sb)=0$ y

$$u(at-sb)=0 \Longrightarrow uat=usb \Longrightarrow usb-uat=0 \Longrightarrow u(sb-at)=0.$$

Esto implica que $(t,b)\backsim(s,a)$. Por lo tanto, $\backsim$ es simétrica.

(*iii*) Supongamos que $(s,a)\backsim(t,b)$ y $(t,b)\backsim(f,e)$. Entonces existen $u,u'\in S$ tales que $u(at)=u(sb)$ y $u'(bf)=u'(te)$. Y por ser A conmutativo y S multiplicativo se sigue que:

$$uu't(af)=u'fu(at)=u'fu(sb)=usu'(bf)=usu'(te)=uu't(se).$$

Implica que

$$uu't(af-se)=0\Rightarrow(s,a)\backsim(f,e).$$

Por lo tanto, $\backsim$ es transitiva.

De (*i*), (*ii*) y (*iii*) se concluye que $\backsim$ es una relación de equivalencia.

Q.E.D

Consideremos el conjunto cociente $[S^{-1}]A := A\times S/\backsim$. Por convención, a veces cada $[(s,a)]\in A\times S$ se denota como $\dfrac{a}{s}$. Ahora, en $[S^{-1}]A$ definamos las siguientes operaciones: $+,\cdot : [S^{-1}]A\times[S^{-1}]A \longrightarrow [S^{-1}]A$, dadas como;

- $[(s,a)] + [(t,b)] := [(st, at+sb)]$,
- $[(s,a)] \cdot [(t,b)] := [(st, ab)]$.

Observación 3.1.4. *Para todo $s \in S$, $[(s,s)] = [(1,1)]$ y $[(s,0)] = [(1,0)]$. Esto es porque, $(s1 - s1) = 0$, es decir, $(s,s) \backsim (1,1)$, para cada $s \in S$, análogamente $0(1) - s(0) = 0$, así que $[(s,0)] = [(1,0)]$.*

Proposición 3.1.5. *Sea A un anillo conmutativo y S un conjunto multiplicativo. $\left(\left[S^{-1}\right] A, +, \cdot\right)$ es un anillo con elemento unidad $1 = [(1,1)]$ y neutro $0 = [(1,0)]$.*

Dem.
Sea A un anillo conmutativo y S un conjunto multiplicativo.

(a) Veamos que $+$ esta bien definida. Con este fin, sea $[(s,a)] = [(s',a')]$ y $[(t,b)] = [(t',b')]$. Tenemos que
$$(s,a) \backsim (s',a') \;\; y \;\; (t,b) \backsim (t',b').$$
Esto implica que existe $u, u' \in S$ tales que $u(as' - sa') = 0 = u'(bt' - tb')$. Y por ser A conmutativo, se tiene para $+$ que:
$$\begin{aligned} uu'\big((at+sb)s't' - st(a't' + s'b')\big) &= uu'\big((as' - sa')tt' + (bt' - tb')ss'\big) \\ &= u'u(as' - sa')tt' + uu'(bt' - tb')ss' = 0. \end{aligned}$$
Se sigue que, $(st, at+sb) \backsim (s't', a't' + s'b')$, es decir, $[(st, at+sb)] = [(s't', a't' + s'b')]$.

Para $\cdot$ tenemos:
$$\begin{aligned} uu'\big(abs't' - sta'b'\big) &= uu'\big(abs't' - sa'bt' + sa'bt' - sta'b'\big) \\ &= uu'\big((as' - sa')bt' + (bt' - tb')sa'\big) \\ &= u'u(as' - sa')bt' + uu'(bt' - tb')sa' = 0. \end{aligned}$$
Se sigue que $(st, ab) \backsim (s't', a'b')$, es decir, $[(st, ab)] = [(s't', a'b')]$. Por lo tanto $+$ y $\cdot$ están bien definida.

(b) Veamos que $(A, +)$ es un grupo abeliano con neutro $[(1,0)]$: sean $[(s,a)], [(t,b)], [(v,c)]$ en $\left[S^{-1}\right] A$.

(i) Veamos que $+$ es asociativo.
$$\begin{aligned} [(s,a)] + \big([(t,b)] + [(v,c)]\big) &= [(s,a)] + [\big(tv, bv + tc\big)] = [(s(tv), a(tv) + s(bv) + s(tc))] \\ &= [((st)v, (at)v + (sb)v + (st)c)] = [(st, at+sb)] + [(v,c)] \\ &= \big([(s,a)] + [(t,b)]\big) + [(v,c)]. \end{aligned}$$
Por lo tanto, $+$ es asociativo.

(ii) Mostremos que $[(1,0)]$ es el elemento neutro. Tenemos:
$$[(s,a)] + [(1,0)] = [(s1, a1 + s0)] = [(s,a)] \quad \text{y} \quad [(1,0)] + [(s,a)] = [(1s, 0s + 1a)] = [(s,a)].$$
Por lo tanto, $[(1,0)]$ es el elemento neutro.

(iii) Ahora, veamos que $[(s,a)]$ tiene inverso aditivo. Dado que:
$$[(s,a)] + [(s,-a)] = [(ss, as - sa)] = [(ss, 0)] = [(1,0)]$$
y
$$[(s,-a)] + [(s,a)] = [(ss, -as + sa)] = [(ss,0)] = [(1,0)],$$
se concluye que $[(s,a)] \in \left[S^{-1}\right] A$ tiene inverso.

De (a), (i), (ii) y (iii) se sigue que $(A,+)$ es un grupo abeliano.

(c) Veamos que $(A,\cdot)$ es asociativo.

$$\begin{aligned}[(s,a)]\big([(t,b)][(v,c)]\big) &= [(s,a)][(tv,bc)] = [(s(tv),a(bc)] = [((st)v,(ab)c)]\\ &= [(st,ab)][(v,c)] = \big([(s,a)][(t,b)]\big)[(v,c)].\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(A,\cdot)$ es asociativo.

(d) Mostremos que $\cdot$ es distributiva respecto a $+$.

(1) Distributividad por la izquierda:

$$\begin{aligned}[(s,a)]\big([(t,b)]+[(v,c)]\big) &= [(s,a)][(tv,bv+tc)] = [(s(tv),a(tv)+(bv)s+(tc)s)]\\ &= [((st)v,(at)v+(sb)v+(st)c] = [(st,at+sb)][(v,c)]\\ &= \big([(s,a)]+[(t,b)]\big)[(v,c)].\end{aligned}$$

(2) Distributividad por la derecha:

$$\begin{aligned}\big([(s,a)]+[(t,b)]\big)[(v,c)] &= [(st,at+sb)][(v,c)] = [((st)v,(at)v+(sb)v+c(st)]\\ &= [(s(tv),a(tv)+s(bv)+s(ct))] = [(s,a)][(tv,bv+tc)]\\ &= [(s,a)]\big([(t,b)]+[(v,c)]\big).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\cdot$ es distributiva respecto a $+$.

(e) Finalmente veamos que $(A,\cdot)$ tiene unidad. Tenemos:

$$[(1,1)]\cdot[(s,a) = [(1s,1a)] = [(s,a)] \quad \text{y} \quad [(s,a)]\cdot[(1,1)] = [(s1,a1)] = [(s,a)].$$

Por lo tanto, $[(1,1)]$ es la unidad en $\left[S^{-1}\right]A$.

De (a), (b), (c), (d) y (e) se concluye que $(A,+,\cdot)$ es un anillo con unidad.

Q.E.D

Proposición 3.1.6. *Sea A anillo conmutativo y S conjunto multiplicativo de A.*

(1) *La función $\varphi : A \longrightarrow [S^{-1}]A$ dada por $\varphi(a) = [(1,a)]$ es un homomorfismo de anillos y cada elemento $[(s,a)] \in \left[S^{-1}\right]A$ es igual a $\varphi(s)^{-1}\varphi(a)$.*

(2) *Para todo $s \in S$, $\varphi(s)$ es invertible en $[S^{-1}]A$.*

(3) *$Nu(\varphi) = \{a \in A : \text{existe } s \in S \text{ tal que } sa = 0\}$.*

Dem.
(1) Sean $a,b \in A$. Tenemos que,

- $\varphi(1) = [(1,1)] = 1$
- $\varphi(a+b) = [(1,a+b)] = [(1,a)]+[(1,b)] = \varphi(a)+\varphi(b)$.
- $\varphi(ab) = [(1,ab)] = [(1,a)]\cdot[(1,b)] = \varphi(a)\varphi(b)$.

Se sigue que φ es un homomorfismos de anillos. Y si $[(s,a)] \in \left[S^{-1}\right] A$, entonces

$$[(s,a)] = [(s,1)][(1,a)] = \varphi(s)^{-1}\varphi(a).$$

(2) Sea $s \in S$.

$$\begin{aligned}[(s,1)] \cdot \varphi(s) &= [(s,1)] \cdot [(1,s)] = [(s1,1s)] = [(s,s)] \\ &= [(1s,s1)] = [(1,s)] \cdot [(s,1)] \\ &= \varphi(s) \cdot [(1,s)].\end{aligned}$$

Por tanto, para cada $s \in S$, $\varphi(s)$ es invertible en $[S^{-1}]A$.

(3) Ahora,

$$\begin{aligned}Nu(\varphi) &= \left\{a \in A : \varphi(a) = [(1,0)]\right\} = \left\{a \in A : [(1,a)] = [(1,0)]\right\} \\ &= \left\{a \in A : \text{ existe } s \in S \text{ tal que } s(a1 - 1(0)) = 0\right\} \\ &= \left\{a \in A : \text{ existe } s \in S \text{ tal que } sa = 0\right\}.\end{aligned}$$

Q.E.D

Proposición 3.1.7. *Sea A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ conjunto multiplicativo. $\left[S^{-1}\right] A$ tiene la siguiente propiedad universal. Para cada anillo B y cada $\psi : A \longrightarrow B$ homomorfismo tal que $\psi(S) \subseteq U(B)$, existe un único homomorfismo $\sigma : \left[S^{-1}\right] A \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ \left[S^{-1}\right] A \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Dem.
Sean A, B anillos con A conmutativo, y sea $S \subseteq A$ conjunto multiplicativo de A y $\psi : A \longrightarrow B$ homomorfismo, tal que $\psi(S) \subseteq U(B)$. Consideremos la siguiente operación $\sigma : \left[S^{-1}\right] A \longrightarrow B$ dada por $\sigma([(s,a)]) = \psi(s)^{-1}\psi(a)$, para cada $[(s,a)] \in \left[S^{-1}\right] A$.

Veamos que σ esta bien definida. Para ello, sean $[(s,a)] = [(s',a')]$, tenemos:

$$\begin{aligned}(s,a) \backsim (s',a') &\Leftrightarrow \text{ existe } u \in S \text{ tal que } u(as' - sa') = 0 \\ &\Leftrightarrow \psi(u)\left(\psi(as') - \psi(sa')\right) = 0.\end{aligned}$$

Dado que $\psi(S) \subset U(B$, se sigue que $\psi(a)\phi(s') = \psi(s)\psi(a')$, así;

$$\psi(s)^{-1}\psi(a) = \psi(a')\psi(s')^{-1}$$

Se sigue que $\sigma([(s,a)]) = \sigma([s',a'])$. Por lo tanto, σ esta bien definida.

Veamos que σ es un homomorfismo de anillos. Con este fin, sean $[(s,a)], [(t,b)] \in \left[S^{-1}\right] A$.

- $\sigma([(1,1)]) = \psi(1)^{-1}\psi(1) = 1$

- Por conmutatividad en A y la distributividad en B, se tiene que:

$$\begin{aligned}\sigma\left([(s,a)] + [(t,b)]\right) &= \sigma([(st, at+sb)]) = \psi(st)^{-1}\psi(at+sb) \\ &= \psi(ts)^{-1}\psi(at) + \psi(st)^{-1}\psi(sb) \\ &= \psi(s)^{-1}\psi(t)^{-1}\psi(t)\psi(a) + \psi(t)^{-1}\psi(s)^{-1}\psi(s)\psi(b) \\ &= \psi(s)^{-1}\psi(a) + \psi(t)^{-1}\psi(b)\end{aligned}$$

Se concluye que, $\sigma([(s,a)] + [(t,b)]) = \sigma([(s,a)]) + \sigma([(t,b)])$.

- Por conmutatividad de A y que $\psi(S) \subseteq U(B)$ se sigue;

$$\begin{aligned}\sigma([(s,a)][(t,b)]) &= \sigma([(st,ab)]) = \psi(st)^{-1}\psi(ab) = \psi(st)^{-1}\psi(a)\psi(b)\\ &= \psi(st)^{-1}\psi(a)\psi(t)\psi(t)^{-1}\psi(b) = \psi(st)^{-1}\psi(at)\sigma\left([(t,b)]\right)\\ &= \sigma\left([(st,at)]\right)\sigma\left([(t,b)]\right)\\ &= \sigma\left([(s,a)]\right)\sigma\left([(t,b)]\right), \quad \text{pues,} \quad [(st,at)] = [(s,a)]\end{aligned}$$

  Por tanto, $\sigma([(s,a)][(t,b)]) = \sigma([(s,a)])\sigma([(t,b)])$.

Se sigue que ψ es un homomorfismo. Ahora para cada $a \in A$, tenemos:

$$\sigma(\varphi(a)) = \sigma([(1,a)]) = \psi(1)^{-1}\psi(a) = \psi(a).$$

Es decir, $\sigma \circ \varphi = \psi$.

Finalmente veamos que σ es único, para ello sea $\tau : \left[S^{-1}\right] A \longrightarrow B$ homomorfismo tal que $\tau \circ \varphi = \psi$ y sea $[(s,a)] \in \left[S^{-1}\right] A$, entonces

$$\begin{aligned}\tau([(s,a)]) &= \tau([(s,1)][(1,a)]) = \tau(\varphi(s)^{-1})\varphi(a)\\ &= \left(\tau \circ \varphi(s)\right)^{-1} \tau \circ \varphi(a)\\ &= \psi(s)^{-1}\psi(a) = \sigma([(s,a)])\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sigma = \tau$, es decir, σ es único con dicha propiedad.

Q.E.D

Teorema 3.1.8. *Sea A un anillo conmutativo, S un conjunto multiplicativo. Si B es un anillo y $\psi : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillo tale que:*

(1) $\psi(S) \subseteq U(B)$,

(2) *Para cada $b \in B$ es de la forma $\psi(s)^{-1}\psi(a)$ para cierto $s \in S$ y $a \in A$,*

(3) $\mathrm{Nu}(\psi) = \{a \in A : \text{ existe } s \in S \text{ tal que } sa = 0\}$.

entonces $\left[S^{-1}\right] A \cong B$

El teorema previo nos dice que el anillo de fracciones $\left[S^{-1}\right] A$ queda totalmente determinado por las tres propiedades previas y por supuesto por su propiedad universal.

3.1.3. Anillos de fracciones sobre anillos no conmutativos

Para extender la idea anterior a anillos no conmutativos, fijémonos en las propiedades de φ y su propiedad universal. Definimos un anillo de fracciones (izquierdos) de un anillo A (no conmutativo).

Definición 3.1.9. *Sea A un anillo y $S \subseteq A$ un conjunto multiplicativo. Definiremos un anillo de fracciones (izquierdo) de A con respecto a S como un anillo $\mathfrak{A}$ junto con un homomorfismo de anillo $\varphi : A \longrightarrow \mathfrak{A}$ que satisfacen lo siguiente:*

(1) $\varphi(S) \subseteq U(\mathfrak{A})$.

(2) *Cada elemento en $\mathfrak{A}$ tiene la forma $\varphi(s)^{-1}\varphi(a)$ con $s \in S$ y $a \in A$.*

(3) $\mathrm{Nu}(\varphi) = \{a \in A : \text{ existe } s \in S \text{ tal que } sa = 0\}$.

Cuando existe este anillo de fracciones cumple la siguiente propiedad universal:

Proposición 3.1.10 (Propiedad universal del anillo de fracciones). *Sea A anillo y S conjunto multiplicativo. Si existe un anillo de fracciones $\mathfrak{A}$, entonces para cada B anillo y $\psi : A \longrightarrow B$ homomorfismo de anillos tal que $\psi(S) \subseteq U(B)$, existe $\sigma : \mathfrak{A} \longrightarrow B$ homomorfismo de anillos tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Dem.
Supongamos que existe un anillo de fracciones $\mathfrak{A}$. Sea B anillo y $\psi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ tales que $\psi(S) \subseteq U(B)$. Por el inciso (2) de la definición 3.1.9 se sigue que para cada $x \in \mathfrak{A}$, existe $a_x \in A$, $s_x \in S$ tales que $x = \varphi(s_x)^{-1}\varphi(a_x)$. Definamos la siguiente función $\sigma : \mathfrak{A} \longrightarrow B$ dada por $\sigma(x) = \psi(s_x)^{-1}\psi(a_x)$ para todo $x \in \mathfrak{A}$.

(a) Veamos que σ está bien definida: sea $x \in \mathfrak{A}$ y supongamos que $x = \varphi(s_x)^{-1}\varphi(a_x) = \varphi(s'_x)^{-1}\varphi(a'_x)$. Así, tenemos que $\varphi(a_x) = \varphi(s_x)\varphi(s'_x)^{-1}\varphi(a'_x)$. Como $\varphi(s_x)\varphi(s'_x)^{-1} \in \mathfrak{A}$, por el inciso (2) de la definición 3.1.9, se sigue que existen $b_x \in A$ y $t_x \in S$ tales que:

$$\varphi(s_x)\varphi(s'_x)^{-1} = \varphi(t_x)^{-1}\varphi(b_x).$$

Esto implica:

(I) $\varphi(t_x)\varphi(s_x) = \varphi(b_x)\varphi(s'_x)$. Esto implica que $\varphi(t_x s_x - b_x s'_x) = 0$, así $t_x s_x - b_x s'_x \in \mathrm{Nu}(\varphi)$. Por tanto, existe $\mu_x \in S$ tal que $\mu_x t_x s_x = \mu_x b_x s'_x$.

(II) $\varphi(a_x) = \varphi(t_x)^{-1}\varphi(b_x)\varphi(a'_x)$. Implica que$\varphi(t_x)\varphi(a_x) = \varphi(b_x)\varphi(a'_x)$, así $\varphi(t_x a_x - b_x a'_x) = 0$, e.d. $t_x a_x - b_x a'_x \in \mathrm{Nu}(\varphi)$. Por tanto, existe $\lambda_x \in S$ tal que $\lambda_x t_x a_x = \lambda_x b_x a'_x$.

De (I) y (II) se sigue que $\psi(\mu_x t_x s_x) = \psi(\mu_x b_x s'_x)$ y $\psi(\lambda_x t_x a_x) = \psi(\lambda_x b_x a'_x)$. Por hipótesis $\psi(S) \subseteq U(B)$, de manera que $\psi(s_x), \psi(s'_x), \psi(t_x), \psi(\mu_x), \psi(\lambda_x)$ son invertibles en B pues $s_x, s'_x, t_x, \lambda_x, \mu_x \in S$. Así;

$$\begin{aligned} \psi(t_x s_x) = \psi(b_x s'_x) \ \text{ y } \ \psi(t_x a_x) = \psi(b_x a'_x) & \\ \Rightarrow \quad & \psi(b_x) = \psi(t_x)\psi(s_x)\psi(s'_x)^{-1} \ \text{ y } \ \psi(t_x)\psi(a_x) = \psi(b_x)\psi(a'_x) \\ \Rightarrow \quad & \psi(t_x)\psi(a_x) = \psi(t_x)\psi(s_x)\psi(s'_x)^{-1}\psi(a'_x) \\ \Rightarrow \quad & \psi(s_x)^{-1}\psi(a_x) = \psi(s'_x)^{-1}\psi(a'_x). \end{aligned}$$

Por tanto, σ esta bien definida.

(b) Veamos que σ es homomorfismo de anillos: con esta finalidad, sean $x, y \in \mathfrak{A}$. Existen $s, s' \in S$ y $a, a' \in A$ tales que $x = \varphi(s)^{-1}\varphi(a)$ y $y = \varphi(s')^{-1}\varphi(a')$:

(1) Tenemos $x + y = \varphi(s)^{-1}\varphi(a) + \varphi(s')^{-1}\varphi(a')$. Por el inciso (2) de la definición 3.1.9 se sigue que existe $t \in S$, $b \in A$ tales que $\varphi(t)^{-1}\varphi(b) = x + y$

$$\Rightarrow \quad \varphi(b) = \varphi(t)\varphi(s)^{-1}\varphi(a) + \varphi(t)\varphi(s')^{-1}\varphi(a').$$

De nuevo, por el inciso (2) de la definición 3.1.9 se sigue que existen $t', t'' \in S$ y $a', a'' \in A$ tales que $\varphi(t')^{-1}\varphi(a') = \varphi(t)\varphi(s)^{-1}$ y $\varphi(t'')^{-1}\varphi(a'') = \varphi(t)\varphi(s')^{-1}$. Así, existen $\lambda, \mu \in S$ tales que $\lambda a's = \lambda t't$ y $\mu a''s' = \mu t''t$. De manera que $\psi(a')\psi(s) = \psi(t')\psi(t)$ y $\psi(a'')\psi(s') = \psi(t'')\psi(t)$. Esto implica que $\psi(t')^{-1}\psi(a') = \psi(t)\psi(s)^{-1}$ y $\psi(t'')^{-1}\psi(a'') = \psi(t)\psi(s')^{-1}$. Por otro lado, $\varphi(b) = \varphi(t')^{-1}\varphi(a')\varphi(a) + \varphi(t'')^{-1}\varphi(a'')\varphi(a')$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t')\varphi(b) = \varphi(a')\varphi(a) + \varphi(t')\varphi(t'')^{-1}\varphi(a'')\varphi(a').$$

Existe $t''' \in S$ y $a''' \in A$ tales que $\varphi(t''')^{-1}\varphi(a''') = \varphi(t')\varphi(t'')^{-1}$. Se sigue que existe $\eta \in S$, tal que

$$\eta a'''t'' = \eta t'''t' \quad \Rightarrow \quad \psi(a''')\psi(t'') = \psi(t''')\psi(t') \quad \Rightarrow \quad \psi(t''')^{-1}\psi(a''') = \psi(t')\psi(t'')^{-1}.$$

Además, $\varphi(t'''t'b) = \varphi(t'''a'a) + \varphi(a'''a''a') = \varphi(t'''a'a + a'''a''a')$, se sigue que existe $\delta \in S$ tal que

$$\begin{aligned}\delta t'''t'b &= \delta(t'''a'a + a'''a''a')\\ &\Rightarrow \psi(b) = \psi(t')^{-1}\psi(a')\psi(a) + \psi(t')^{-1}\psi(t''')^{-1}\psi(a''')\psi(a'')\psi(a')\\ &\Rightarrow \psi(b) = \psi(t)\psi(s)^{-1}\psi(a) + \psi(t)\psi(s')^{-1}\psi(a').\end{aligned}$$

Por tanto, $\sigma(x+y) = \psi(t)^{-1}\psi(b) = \psi(s)^{-1}\psi(a) + \psi(s')^{-1}\psi(a') = \sigma(x) + \sigma(y)$.

(2) $xy = \varphi(s)^{-1}\varphi(a)\varphi(s')^{-1}\varphi(a')$, existe $t \in S$, y $b \in A$ tales que $\varphi(a)\varphi(s')^{-1} = \varphi(t)^{-1}\varphi(b)$

$$\Rightarrow \quad \sigma(xy) = \sigma(\varphi(ts)^{-1}\varphi(ba')) = \psi(ts)^{-1}\psi(ba') = \psi(s)^{-1}\psi(t)^{-1}\psi(b)\psi(a')$$

Como $\varphi(t)\varphi(a) = \varphi(b)\varphi(s')$, entonces existe $\lambda \in S$ tal que $\lambda ta = \lambda bs'$, así $\psi(a)\psi(s')^{-1} = \psi(t)^{-1}\psi(b)$. En consecuencia,

$$\sigma(xy) = \psi(s)^{-1}\psi(a)\psi(s')^{-1}\psi(a') = \sigma(x)\sigma(y).$$

(3) Como $1 = \varphi(1)^{-1}\varphi(1)$, entonces $\sigma(1) = \psi(1)^{-1}\psi(1) = 1$.

De (1), (2) y (3) se concluye que σ es un homomorfismos de anillos.

(c) Finalmente veamos que σ es único y $\sigma \circ \varphi = \psi$. Sea $a \in A$, tenemos.

$$\sigma\circ\varphi(a) = \sigma(\varphi(a)) = \sigma(1\cdot\varphi(a)) = \sigma(\varphi(1)^{-1}\varphi(a)) = \psi(1)^{-1}\psi(a) = \psi(a).$$

Por lo tanto, $\sigma \circ \varphi = \psi$.

De $(a), (b), (c)$ se concluye lo deseado.

Q.E.D

Sabemos que si existe un anillo de fracciones $\mathfrak{A}$, entonces es único salvo isomorfismos. Sin embargo, en esta ocasión vamos a demostrar esta afirmación.

Proposición 3.1.11. *Sea A un anillo y S un subconjunto multiplicativo. Si existe un anillo de fracciones $\mathfrak{A}$ (con respecto a S), entonces es único salvo isomorfismos.*

Dem.
Supongamos que existe (A', φ') anillo de fracciones. Sea (A'', φ'') otro anillo de fracciones. Por la proposición 3.1.10 se sigue que existen únicos $\sigma' \in \mathrm{Hom}(A', A'')$, $\sigma'' \in \mathrm{Hom}(A'', A')$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi''"] \arrow[d, "\varphi'"'] & A'' \\ A' \arrow[ur, "\sigma'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\varphi''"'] & A' \\ A'' \arrow[ur, "\sigma''"'] & \end{tikzcd} \tag{I}$$

Ahora, por la proposición 3.1.10, existen únicos $g \in \mathrm{Hom}(A', A')$, $h \in \mathrm{Hom}(A'', A'')$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & A' \arrow[r, "\sigma'"] & A'' \arrow[r, "\sigma''"] & A' \\ A' \arrow[urrr, "g"'] & & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi''"] \arrow[d, "\varphi''"'] & A'' \arrow[r, "\sigma''"] & A' \arrow[r, "\sigma'"] & A'' \\ A'' \arrow[urrr, "h"'] & & & \end{tikzcd} \tag{II}$$

Así, de (I) se tiene que $\sigma' \circ \varphi' = \varphi''$ y $\sigma'' \circ \varphi'' = \varphi'$. De (II) se tiene que $\sigma'' \circ \sigma' \circ \varphi' = g \circ \varphi'$ y $\sigma' \circ \sigma'' \circ \varphi'' = h \circ \varphi''$. De las dos primeras igualdades se sigue que $\sigma'' \circ \sigma' \circ \varphi' = \sigma'' \circ (\sigma' \circ \varphi') = \sigma'' \circ \varphi'' = \varphi'$, de manera similar se tiene que $\sigma' \circ \sigma'' \circ \varphi'' = \varphi''$. De manera que tomando $g = \sigma'' \circ \sigma'$, $g = \mathrm{id}_{A'}$ y $h = \sigma' \circ \sigma''$, $h = \mathrm{id}_{A''}$ los diagramas correspondientes en (II) conmutan. Por la unicidad de g y h, se concluye que $\sigma'' \circ \sigma' = \mathrm{id}_{A'}$ y $\sigma' \circ \sigma'' = \mathrm{id}_{A''}$, en consecuencia $A' \cong A''$.

Q.E.D

En virtud de la proposición 3.1.11, dado un anillo A y S subconjunto multiplicativo de A, denotaremos al anillo de fracciones izquierdo respecto a S como $[S^{-1}]A$ siempre que exista. El siguiente teorema nos proporciona las condiciones necesarias y suficientes para saber la existencia del anillo de fracciones.

Lema 3.1.12. *Sea A un anillo y S un subconjunto multiplicativo de A. Si $\left[S^{-1}\right]A$ existe, entonces S satisface:*

(S_1) $\forall\ a \in A$ *y* $\forall\ s \in S$, *se tiene que* $As \cap Sa \neq \emptyset$

(S_2) $\forall\ a \in A$ *y* $\forall\ s \in S$ *con* $as = 0$, *implica que existe* $t \in S$ *tal que* $ta = 0$.

Dem.
Supongamos que $[S^{-1}]A$ existe. Sea $a \in A$, $s \in S$. Veamos que se satisface S_1. Tenemos que $\varphi(a)\varphi(s)^{-1} \in [S^{-1}]A$, pues $\varphi(s)$ tiene inversa. Por (2), de la definición 3.1.9 se sigue que existen $a' \in A$, $s' \in S$ tales que $\varphi(s')^{-1}\varphi(a') = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$. Así, $\varphi(a's) = \varphi(s'a)$, esto es, $a's - s'a \in Nu(\varphi)$. Por el inciso (3) de la definición 3.1.9 existe $t \in S$ tal que $(ta')s = (ts')a$, de manera que $As \cap Sa \neq \emptyset$. Por lo tanto, (S_1) se cumple. Ahora, veamos que S_2 se cumple. Supongamos que $as = 0$, Entonces $\varphi(as) = \varphi(a)\varphi(s) = 0$, así $\varphi(a) = 0$. Por el inciso (3) de la definición 3.1.9 se sigue que existe $t \in S$ tal que $ta = 0$. Por lo tanto, (S_2) se cumple.

Q.E.D

Definición 3.1.13. *Un conjunto multiplicativo S de A que cumple con S_1 y S_2 se llama* ***conjunto denominador (izquierdo)****.*

A partir de aquí supongamos que S es un conjunto denominador izquierdo. Entonces, definamos en $S \times A$ la siguiente relación:

$$(s, a) \sim (t, b) \iff \text{existen } c, d \in A \quad \text{tal que} \quad cs = dt \in S \quad \text{y} \quad ca = db \in A.$$

Proposición 3.1.14. $\sim$ *es una relación de equivalencia.*

Dem.
Sean $(s, a), (s', a'), (s'', a'') \in S \times A$.

(i) Claramente $\sim$ es reflexiva y simétrica, se sigue de su definición.

(ii) Supongamos que $(s, a) \sim (s', a')$ y $(s', a') \sim (s'', a'')$. Entonces, existen $b, b', c, c' \in A$ tales que:

- $ba = ca' \in A$, $bs = cs' \in S$.
- $b'a' = c'a'' \in A$, $b's' = c's'' \in S$.

Dado que S_1 se cumple, entonces $A(cs') \cap S(b's') \neq \emptyset$, esto es, existe $r \in A$ y $t \in S$ tal que $rcs' = tb's'$, implica que $(rc - tb')s' = 0$ y por S_2 se sigue que existe $l \in S$ tal que $lrc = ltb'$. Así, $rbs = r(bs) = r(cs') = tb's' = t(c's'') \in S$, en consecuencia:

- $$\begin{aligned}(lrb)a &= (lr)(ba) = (lr)(ca') = (lrc)a' \\ &= (ltb')a' = (lt)(b'a') = (lt)(c'a'') = (ltc')a'' \in A\end{aligned}$$
- $(lrb)s = l(rbs) = l(tc's'') = (ltc')s'' \in S$.

Por tanto $(s, a) \sim (s'', a'')$, es decir, $\sim$ es transitiva.

De (i) y (ii) se concluye que $\sim$ es relación de equivalencia.

Q.E.D

Observemos que para cada $s \in S$, $[(s,0)] = [(1,0)]$, pues $(1)s = (s)1 \in S$ y $(1)(0) = (s)(0)$, es decir, $(s,0) \sim (1,0)$. Ahora, consideremos $\mathscr{A} := S \times A/\sim$ y definamos en $\mathscr{A}$ las siguientes operaciones:

- $+ : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ definida como $[(s,a)] + [(t,b)] = [(us, ua+vb)]$ donde $us = vt \in S$.
- $\cdot : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ definida como $[(s,a)] \cdot [(t,b)] = [(ys, xb)]$ donde $xt = ya$ y $y \in S$.

La condición S_1 nos asegura la existencia de $u, v \in A$ en la suma $(+)$ al igual que la existencia de $\mu \in A$, $\eta \in S$ en el producto $(\cdot)$. Observemos que en la definición de $+$ no estamos exigiendo que v y ni u sean elementos de S.

Lema 3.1.15. $(\mathscr{A}, +)$ *es un grupo abeliano.*

Dem.
(I) Sea $[(s,a)], [(t,b)] \in \mathscr{A}$ y $u \in A$, $v \in S$ tales que $us = vb$. Veamos primero que $+$ no depende de la elección de u y v. Para ello sean $u, v, u', v' \in A$ tales que $us = vt, u's = v't \in S$. Por S_1 se tiene que $A(us) \cap S(u's) \neq \emptyset$, por lo que existen $x \in A$, $y \in S$ tales que $x(us) = y(u's) \in S$, se sigue que $(xu - yu')s = 0$ y por S_2 existe $r \in S$ tal que $r(xu - yu') = 0$, o equivalentemente $rxu = ryu'$. Por otro lado, $us = vt, u's = v't$, entonces $x(vt) = x(us) = y(u's) = y(v't)$ lo que implica que $r(xvt) = r(yv't)$, obteniendo así que $(rxv - ryv')t = 0$ y por S_2 existe $l \in S$ tales que $l(rxv - ryv') = 0$ lo que equivale a $lrxv = lryv'$. Resumiendo tenemos la siguientes igualdades:

- $xus = yu's$.
- $rxu = ryu'$.
- $lrxv = lryv'$.

Ahora,

$$\begin{aligned}(lrx)(us) &= (lr)(xus) = (lr)(yu's) = (lry)(u's) \in S, \text{ pues } l, r, y, u's \in S.\\ (lrx)(ua+vb) &= (lrx)(ua) + (lrx)(vb) = l(rxu)a + (lrxv)b = l(ryu')a + (lryv')b\\ &= (lry)(u'a) + (lry)(v'b) = (lry)(u'a + v'b).\end{aligned}$$

Se sigue que $(us, ua+vb) \sim (u's, u'a + v'b)$, es decir $[(us, ua+vb)] = [(u's, u'a+v'b)]$ lo cual prueba lo deseado.

(II) Veamos que $+$ no depende de los representantes de las clases.

Para ello, sean $[(s,a)] = [(s',a')]$, $[(t,b)] = [(t',b')]$ en $\mathscr{A}$ y sean $u, v, c, d \in A$ tales que:

- $us = vt \in S$.
- $ct = dt' \in S$ y $cb = db'$, pues (t,b) esta relacionado con (t',b').
- $es = fs' \in S$ y $ea = fa'$, pues (s,a) esta relacionado con (s',a').

Por (S_1) se tiene que $A(ct) \cap S(us) \neq \emptyset$, es decir, existen $\sigma \in A$, $\tau \in S$ tales que $\sigma(ct) = \tau(us) \in S$, pues $\tau, us \in S$. Dado que $us = vt$ se sigue que $\sigma(ct) = \tau(vt)$ y por (S_2), existe $l \in S$ tales que $l\sigma c = l\tau v$.

Así,

$$\begin{aligned}l\tau(ua+vb) &= (l\tau)ua + (l\tau)va = (l\tau u)a + (l\tau v)b = (l\tau u)a + (l\sigma c)b\\ &= (l\tau u)a + (l\sigma)(cb) = l\tau u)a + (l\sigma)(db') = (l\tau u)a + (l\sigma d)b' \qquad \text{(i)}\end{aligned}$$

$$(l\tau u)s = l(\tau us) = l(\sigma ct) = l\sigma(ct) = l\sigma(dt') = (l\sigma d)t' \in S, \text{ pues } l, \tau us \in S \qquad \text{(ii)}$$

Ahora, por S_1 se tiene que $A(es) \cap S(l\tau us) \neq \emptyset$, es decir, existen $\delta \in A$ y $\omega \in S$ tales que

$$\delta(es) = \omega(l\tau us) \in S.$$

Por (ii) se sigue que existe $k \in S$, tales que $k\delta e = k\omega l\tau u$, así,

$$\begin{aligned}(k\omega l\tau)(ua+vb) &= (k\omega)(l\tau)(ua+vb) = (k\omega)((l\tau u)a + (l\sigma d)b') = (k\omega)(l\tau u)a + (k\omega)(l\sigma d)b' \\ &= (k\omega l\tau u)a + (k\omega l\sigma d)b' = (k\delta e)a + (k\omega l\sigma d)b' = (k\delta)(ea) + (k\omega l\sigma d)b' \\ &= (k\delta)(fa') + (k\omega l\sigma d)b' = (k\delta f)a' + (k\omega l\sigma d)b' \qquad \text{(iii)}\end{aligned}$$

$$(k\omega l\tau)(us) = (k\omega)(l\tau us) = (k\omega)(l\sigma dt') = (k\omega l\sigma d)t' \in S, \text{ pues } k,\omega \in S \text{ y } (ii) \qquad \text{(iv)}$$

$$(k\omega l\tau)(us) = (k\omega l\tau u)s = (k\delta e)s = (k\delta)(es) = (k\delta)(fs') = (k\delta f)s' \qquad \text{(v)}$$

De (iv), (v) se tiene que $(k\delta f)s' = (k\omega l\sigma d)t'$ y la definición de $+$ se sigue que

$$[(s',a')] + [(t',b')] = \left[\big((k\omega l\sigma d)t', (k\delta f)a' + (k\omega l\sigma d)b'\big)\right].$$

Por otro lado, $1, k\omega l\tau \in A$ y cumplen:

- $(k\omega l\tau)(us) = (1)(k\omega l\tau us) \in S$, pues (iv).
- $(k\omega l\tau)(ua+vb) = (1)\big((k\delta f)a' + (k\omega l\sigma d)b'\big)$.

Por definición de $\sim$ se tiene que $(us, ua+vb) \sim \big((l\omega l\tau us, (k\delta f)a' + (k\omega l\sigma d)b'\big)$, en consecuencia

$$[(s,a)] + [(t,b)] = [(s',a')] + [(t',b')].$$

Por lo tanto, $+$ está bien definida.

(III) Veamos que $+$ es asociativa. Sean $[(s,a)], [(t,b)], [(r,c)] \in \mathscr{A}$ y sean $u,v \in A$ tal que $us = vt \in S$ y por S_1 se sigue que existen $x \in A$ y $y \in S$ tales que $x(us) = yr \in S$, pues $y, r \in S$ y como $us = vt$ entonces $(xv)t = yr \in S$, por definición de $+$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\Big([(s,a)] + [(t,b)]\Big)[(r,c)] &= [(us, ua+vb)][(r,c)] = [(x(us), x(ua+vb)+yc)] \\ &= [(s,a)] + [(xus, xvb+yc)], \text{ pues } (xu)s = (1)(xus) \in S, \\ &= [(s,a)] + \Big([(t,b)] + [(r,c)]\Big), \text{ pues } (xv)t = yr \in S.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $+$ es asociativa.

(IV) Existencia del neutro: Sea $[(s,a)] \in \mathscr{A}$, como $(s)(1) = (1)s \in S$, pues $s \in S$, entonces de la definición de $+$, se sigue que:

$$[(1,0)] + [(s,a)] = [((1)s, (s)0 + (1)a)] = [(s,a)].$$

Similarmente,

$$[(s,a)] + [(1,0)] = [((s)1, (1)a + (s)0)] = [(s,a)].$$

Por lo tanto, $[(1,0)]$ es el neutro en $(\mathscr{A}, +)$.

(V) Veamos que $+$ es cerrada bajo inversos: Sea $[(s,a)] \in \mathscr{A}$, como $(1)s = (1)s \in S$, entonces por la definición de $+$ se obtiene que:

$$[(s,a)] + [(s,-a)] = [(s, (1)a + (1)(-a))] = [(s,0)] = [(1,0)].$$

Igualmente,

$$[(s,-a)] + [(s,a)] = [(s, (1)(-a) + (1)(a))] = [(s,0)] = [(1,0)].$$

Por lo tanto, $+$ es cerrada bajo inversos.

(VI) Veamos que $+$ es conmutativa. Sean $[(s,a)], [(t,b)] \in \mathscr{A}$ y sean $u,v \in A$ tales que $us = vt$, entonces

$$[(s,a)] + [(t,b)] = [(us, ua+vb)] = [(vt, vb+ua)] = [(t,b)] + [(s,a)].$$

Por lo tanto, $+$ es conmutativo.

Se concluye que $(\mathscr{A}, +)$ es un grupo abeliano.

Q.E.D

Lema 3.1.16. $(\mathscr{A},\cdot)$ *es un monoide.*

Dem.
(I) Veamos que $\cdot$ no depende de la elección de los parámetros. Para ello, sean $[(s,a)],[(t,b)]\in\mathscr{A}$ y sean $x,u\in A$, $y,v\in S$ tales que $xt=ya$ y $ut=va$. Por $Ay\cap Sv\neq\emptyset$, existen $\alpha\in A$, $\beta\in S$ tales que $\alpha y=\beta v\in S$, pues $v\in S$, esto implica que $\alpha(xt)=\alpha(ya)=(\alpha y)a=(\beta v)a=\beta(va)=\beta(ut)=(\beta u)t$, así $(\alpha x-\beta u)t=0$, y por (S_2) existe $\rho\in S$ tal que $\rho\alpha x=\rho\beta u$. En consecuencia tenemos:

$$(\rho\alpha)(ys)=\rho(\alpha y)s=\rho(\beta v)s=(\rho\beta)(vs)\in S,\ \text{pues } \rho,\beta,v,t\in S.$$

y

$$(\rho\alpha)(xb)=(\rho\alpha x)b=(\rho\beta u)b=(\rho\beta)(ub).$$

Por tanto, $(ys,xb)\sim(vs,ub)$, es decir, $[(ys,xb)]=[(vs,ub)]$ lo cual prueba lo deseado.

(II) Veamos que $\cdot$ no depende del representante elegido para cada clase. Antes de mostrar esto, probemos la siguiente afirmación:

Afirmación: Sean $[(s,a)],[(t,b)]\in\mathscr{A}$ y sea $x\in A$ tales que $xs\in S$ y $(s,a)\sim(xs,xa)$, entonces $[(s,a)]\cdot(t,b)]=[(xs,xa)]\cdot(t,b)]$.

Dem.
Sean $p\in A$ y $q\in S$ tales que $pt=qa$, esto se puede hacer por S_1. Por definición de $\cdot$ se tiene que

$$[(s,a)]\cdot(t,b)]=[(qs,pb)].$$

Como $xs\in S$, entonces por S_1 se sigue que $A(qs)\cap S(xs)\neq\emptyset$, es decir, existen $\xi\in A$, $\eta\in S$ tales que $\xi(qs)=\eta(xs)$, equivalentemente $(\xi q-\eta x)s=0$,entonces por S_2 se sigue que existe $m\in S$ tal que

$$m\xi q=m\eta x.$$

Así,

$$(m\eta)(xa)=(m\eta x)a=(m\xi q)a=(m\xi)(qa)=(m\xi)(pt)=(m\xi p)t.$$

Como $m,\eta\in S$, entonces $m\eta\in S$ y por definición de $\cdot$ se sigue inmediatamente que

$$[(xs,xa)]\cdot[(t,b)]=[(m\eta xs,m\xi pb)].$$

Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}&1(m\eta xs)=(m\eta)(xs)=(m\eta x)s=(m\xi q)s=(m\xi)(qs)\in S,\\&1(m\xi pb)=(m\xi)(pb).\end{aligned}$$

Entonces, por definición de $\sim$ se concluye que $(m\eta xs,m\xi pb)\sim(qs,pb)$ y en consecuencia,

$$[(xs,xa)]\cdot[(t,b)]=[(m\eta xs,m\xi pb)]=[(qs,pb)]=[(s,a)]\cdot[(t,b)].$$

Por lo tanto, la afirmación es cierta.

Ahora, supongamos que $[(s,a)]=[(s',a')]$ y $[(t,b)]=[(t',b')]$ en $\mathscr{A}$ y sean $u,c,d,e,f\in A$ y $v\in S$ tales que:

- $ut=va$.
- $cs=ds'\in S$ y $ca=da'$, pues (s,a) esta relacionado con (s',a').
- $et=ft'\in S$ y $eb=fb'$, pues (t,b) esta relacionado con (t',b').

Por definición de $\cdot$ tenemos que:

$$[(s,a)]\cdot[(t,b)]=[(vs,ub)].$$

Por (S_1) tenemos que $A(et)\cap S(va)\neq\emptyset$, es decir, existen $\sigma\in A$, $\tau\in S$ tales que $\sigma(et)=\tau(va)=\tau(ut)$, así $(\sigma e-\tau u)t=0$, entonces por (S_2) existe $l\in S$ tal que

$$l\sigma e=l\tau u. \tag{1}$$

Ahora,

$$l\tau vs\in S,\ \text{ pues } l,\tau,y,s\in S. \tag{2}$$

$$l\tau ub=(l\sigma e)b=(l\sigma)(eb)=(l\sigma)(fb')=l\sigma fb', \qquad (\text{ usando } (1)) \tag{3}$$

$$l\tau va=(l\tau)(va)=(l\tau)(ut)=(l\tau u)t=(l\sigma e)t=(l\sigma)(et)=(l\sigma)(ft')=l\sigma ft', \qquad (\text{ usando } (1)) \tag{4}$$

Por (2) y (S_1) se tiene que $A(l\tau vs)\cap S(cs)\neq\emptyset$, es decir, existen $\omega\in A$, $\delta\in S$ tales que $\omega(l\tau vs)=\delta(cs)$, como $\delta, cs\in S$, entonces $\delta(cs)=\omega(l\tau vs)\in S$. De la igualdad se obtiene que $(\delta c-\omega l\tau v)s=0$, por (S_2) existe $k\in S$ tal que

$$k\delta c=k\omega l\tau v. \tag{5}$$

Tenemos

$$(k\omega l\tau)(vs)=(k\omega l\tau v)s=(k\delta c)s=(k\delta)(cs)=(k\delta)(ds')=k\delta ds'\in S \qquad (\text{ usando } (5)) \tag{6}$$

$$(k\omega l\tau)(ub)=(k\omega)(l\tau ub)=(k\omega)(l\sigma fb')=k\omega l\sigma fb', \qquad (\text{ usando } (3)) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}(k\omega l\sigma f)t'&=(k\omega)(l\sigma ft')=(k\omega)(l\tau va)=(k\omega l\tau v)a=(k\delta c)a=(k\delta)(ca)\\&=(k\delta)(da').\end{aligned} \qquad (\text{ usando } (4),(5)) \tag{8}$$

Como $k,\delta\in S$ por definición de $\cdot$ y (8) se sigue que:

$$[(ds',da')]\cdot[(t',b')]=[(k\delta ds',k\omega l\sigma fb')].$$

De (6), (7) y la definición de $\sim$ se sigue que $(k\delta ft',k\omega l\sigma da')\sim(vs,ub)$, en consecuencia

$$[(ds',da')]\cdot[(t',b')]=[(s,a)]\cdot[(t,b)].$$

Y por la afirmación se concluye que $[(s',a')]\cdot[(t',b')]=[(s,a)]\cdot[(t,b)]$. Por lo tanto, $\cdot$ esta bien definido.

(III) Veamos que $\cdot$ es asociativo. Sean $[(s,a)],[(t,b)],[(r,c)]\in\mathscr{A}$, por (S_1) se sigue que existen $u\in A$, $v\in S$ tales que $ur=vb$, por lo que por definición de $\cdot$ se sigue que

$$[(t,b)]\cdot[(r,c)]=[(vt,uc)].$$

Igualmente, por S_1 existen $\alpha\in A$ y $\beta\in S$ tales que $\alpha(vt)=(\beta)a$ y de la definición de $\cdot$ se sigue que

$$[(s,a)]\cdot[(vt,uc)]=[(\beta s,\alpha(uc))],$$

Así,

$$[(s,a)]\cdot\Big([(t,b)]\cdot[(r,c)]\Big)=[(\beta s,\alpha uc)]. \tag{a}$$

Por otro lado, como $(\alpha v)t=(\beta)a$ y $\beta\in S$, se sigue de la definición de $\cdot$ que

$$[(s,a)]\cdot[(t,b)]=[(\beta s,\alpha vb)]=[(\beta s,\alpha ur)],\ \text{ pues } ur=vb.$$

Y como $(\alpha u)r = 1(\alpha vb)$ y $1 \in S$, se sigue de la definición de $\cdot$ que

$$[(\beta s, \alpha ur)] \cdot [(r, c)] = [(\beta s, \alpha uc)].$$

Así,

$$\Big([(s, a)] \cdot [(t, b)]\Big) \cdot [(r, c)] = [(\beta s, \alpha uc)]. \tag{b}$$

De (a) y (b) se concluye que $\cdot$ es asociativo.

(IV) La unidad es $[(1, 1)]$. Sea $[(s, a)] \in \mathscr{A}$, como $1(s) = s(1)$ y $s \in S$ entonces por definición $\cdot$ se tiene que

$$[(1, 1)] \cdot [(s, a)] = [((s)1, 1(a))] = [(s, a)].$$

Similarmente, como $(a)1 = 1(a)$, entonces por definición de $\cdot$ se tiene que

$$[(s, a)] \cdot [(1, 1)] = [((1)s, a(1))] = [(s, a)].$$

Por lo tanto, $[(1, 1)]$ es la unidad de $\mathscr{A}$.

De $(I) - (IV)$ se concluye que $(\mathscr{A}, \cdot)$ es un monoide.

Q.E.D

Teorema 3.1.17. $(\mathscr{A}, +, \cdot)$ *es un anillo con unidad* $[(1, 1)]$, *y neutro* $[(1, 0)]$

Dem.
En virtud de los dos lemas previos solo nos resta probar que $\cdot$ es distributiva respecto de $+$. Para ello, sean $[(s, a)], [(t, b)], [(r, c)] \in \mathscr{A}$.

(I) Sean $u, v \in A$ tales que $ut = vr \in S$. Entonces por la definición de $+$ tenemos que

$$[(t, b)] + [(r, c)] = [(ut, ub + vc)].$$

Por S_1 existen $\sigma \in A$, $\tau \in S$ tales que $\sigma(ut) = \tau a$, entonces de la definición de $\cdot$ se sigue que

$$[(s, a)] \cdot [(ut, ub + vc)] = [(\tau s, \sigma(ub) + \sigma(vc))].$$

Así,

$$[(s, a)] \cdot \Big([(t, b)] + [(r, c)]\Big) = [(\tau s, \sigma(ub) + \sigma(vc))]. \tag{1}$$

Por otro lado, como $\sigma(ut) = \tau a$ y $ut = vr$, entonces $(\sigma u)t = \tau a$ y $(\sigma v)r = \tau a$ y por la definición de $\cdot$ se sigue que

$$[(s, a)] \cdot [(t, b)] = [(\tau s, \sigma ub)] \quad \text{y} \quad [(s, a)] \cdot [(r, c)] = [(\tau s, \sigma vc)].$$

Como $1(\tau s) = 1(\tau s) \in S$, entonces por definición de suma se tiene que

$$[(s, a)] \cdot [(t, b)] + [(s, a)] \cdot [(r, c)] = [(\tau s, \sigma(ub) + \sigma(vc))]. \tag{2}$$

De (a) y (b) se concluye que

$$[(s, a)]\Big([(t, b)] + [(r, c)]\Big) = [(s, a)] \cdot [(t, b)] + [(s, a)] \cdot [(r, c)].$$

(II) Por (S_1) existen $\alpha, \delta \in A$ y $\beta, \omega \in S$ tales que $\alpha r = \beta a$ y $\delta r = \omega b$, por definición de $\cdot$ tenemos que

$$[(s, a)][(r, c)] = [(\beta s, \alpha c)],$$

$$[(t, b)][(r, c)] = [(\omega t, \delta c)].$$

Por (S_1) $A(\beta s) \cap S(\omega t) \neq \emptyset$, es decir, existe $x \in A$ y $y \in S$ tales que $x(\beta s) = y(\omega t) \in S$, pues $y, \omega, r \in S$. Así,

$$[(s,a)] \cdot [(r,c)] + [(t,b)] \cdot [(r,c)] = [(x\beta s, x\alpha c + y\delta c)]. \tag{3}$$

Por otro lado, como $(x\beta)s = (y\omega)t \in S$ entonces de la definición de $+$ se sigue que

$$[(s,a)] + [(t,b)] = [(x\beta s, x\beta a + y\omega b)].$$

Dado que $\alpha r = \beta a$ y $\delta r = \omega b$, entonces $x\beta a + y\omega b = (x\alpha)r + (y\delta)r = \Big((x\alpha) + (y\delta)\Big)r$, es decir,

$$\Big((x\alpha) + (y\delta)\Big)r = (1)\Big(x\beta a + y\omega b\Big),$$

y por lo que de la definición de $\cdot$ se obtiene que

$$[(x\beta s, x\beta a + y\omega b)] \cdot [(r,c)] = [(x\beta s, (x\alpha)c + (y\delta)c)].$$

Así,

$$\Big([(s,a)] + [(t,b)]\Big) \cdot [(r,c)] = [(x\beta s, x\alpha c + y\delta c)]. \tag{4}$$

Por lo tanto, de (3) y (4) se concluye que

$$\Big([(s,a)] + [(t,b)]\Big) \cdot [(r,c)] = [(s,a)] \cdot [(r,c)] + [(t,b)] \cdot [(r,c)].$$

De (I) y (II) se tiene que $\cdot$ es distributiva respecto de $+$.

Se concluye que $(\mathscr{A}, +, \cdot)$ es un anillo con unidad $[(1,1)]$, y neutro $[(1,0)]$.

Q.E.D

Ahora, sea $\phi : A \longrightarrow \mathscr{A}$ definida por $\phi(a) = [(1,a)]$, $\forall\ a \in A$. Veamos que ϕ es un homomorfismo de anillos..

- Sean $a, b \in A$. Como $1 \in S \cap A$ y $1(1) = 1(1)$, por definición de $+$ se sigue inmediatamente que

  $$\begin{aligned}\phi(a) + \phi(b) &= [(1,a)] + [(1,b)] = [(1, 1(a) + 1(b)] \\ &= [(1, a+b)] = \phi(a+b).\end{aligned}$$

  Por lo tanto $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$, para cada $a, b \in A$.

- Sea $a \in A$, Como $1 \in S$ y $(a)1 = (1)a$, entonces por definición de $\cdot$, se sigue que

  $$\begin{aligned}\phi(a)\phi(b) &= [(1,a)][(1,b)] = [((1)1, (a)b)] \\ &= [(1, ab)] = \phi(ab)\end{aligned}$$

  Por lo tanto $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, para cada $a, b \in A$.

- Finalmente, $\phi(1) = [(1,1)]$, y $[(1,1)]$ es la unidad de $\mathscr{A}$.

Se sigue que ϕ es un homomorfismo de anillos (con unidad).

Proposición 3.1.18. *$\mathscr{A}$ junto con ϕ cumple la definición de anillo de fracciones.*

Dem.
(I) Veamos que se cumple (1) de la definición de anillo de fracciones.
Sea $s \in S$. Por definición de $\cdot$, se sigue inmediatamente que:

$$[(s,1)] \cdot [(1,s)] = [(s,s)] = [(1,1)] = [(1,s)] \cdot [(s,1)], \text{ pues } (1)s = (s)1.$$

Es decir, $[(s,1)] \cdot \phi(s) = [(1,1)] = \phi(s)[(s,1)]$. Por lo que $\phi(s) \in U(\mathscr{A})$ y $\phi(s)^{-1} = [(s,1)]$. Por lo tanto, $\phi(S) \subset U(\mathscr{A})$.

(II) Veamos que se satisface(2) de la definición de anillo de fracciones. Tomemos $[(s,a)] \in \mathscr{A}$. Dado que $1(1) = 1(1)$, $1 \in A \cap S$ por la definición de $\cdot$ se sigue inmediatamente que:

$$[(s,1)][(1,a)] = [(s,a)].$$

Por lo tanto, $[(s,a)] = \phi(s)^{-1}\phi(a)$.

(III) Finalmente, mostremos que se cumple (3) de la definición de anillos de fracciones.

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{Nu}(\phi) \quad &\Leftrightarrow \quad \phi(a) = [(1,a)] = [(1,0)] \\ &\Leftrightarrow \quad \text{existen } \ c,d \in A \ \text{ tal que } \ c(1) = d(1) \in S \ \text{ y } \ c(a) = d(0) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{existe } \ s \in S \ \text{ tal que } \ sa = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathrm{Nu}(\phi) = \{a \in A : \ \text{existe } \ s \in S \ \text{ tal que } \ sa = 0\}$.

De $(I), (II), (III)$ se sigue que $\mathscr{A}$ junto con ϕ es un anillo de fracciones.

Q.E.D

Teorema 3.1.19. *Sea A un anillo y S un subconjunto multiplicativo de A. $\left[S^{-1}\right] A$ existe si y solo si S es un conjunto denominador. Más aún, $\left[S^{-1}\right] A = \mathscr{A}$.*

Dem.
Por el Lema 3.1.14, Lema 3.1.15, Lema 3.1.16, Teorema 3.1.17 y Proposición 3.1.18

Q.E.D

3.2. Módulos de fracciones

Dado un anillo A y un conjunto denominador S, hemos construido su anillo de fracciones $\left[S^{-1}\right] A$ y que de hecho tiene estructura de (A,A)-bimódulo, ahora, A tiene estructura de A-módulo, entonces podemos considerar el A-módulo $\left[S^{-1}\right] A \otimes_A A$ que sabemos es isomorfo a A, con base en esta observación podemos plantearnos si en lugar tomar solo a A como A-módulo izquierdo consideramos cualquier A-módulo izquierdo, ¿podremos hablar de módulos de fracciones?.

Definición 3.2.1. *Sea S un conjunto denominador (izquierdo) en el anillo A. Para cada $M \in A$-**Mod**, definimos $[S^{-1}]M := [S^{-1}]A \otimes_A M$ con su estructura canónica como A-módulo izquierdo. $[S^{-1}]M$ se llama módulo de fracciones respecto a S.*

A partir de aquí vamos a tomar A un anillo y S un conjunto denominador (izquierdo) de A.

Proposición 3.2.2. *Dado $M \in A$-**Mod**, el homomorfismo canónico $\mu_M : M \longrightarrow [S^{-1}]M$ definido para cada $m \in M$ como $\mu_M(m) = 1 \otimes m$, tiene la siguiente propiedad universal: Para cada $N \in [S^{-1}]A$-**Mod**, $\phi \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ existe un único $\sigma \in \mathrm{Hom}_{[S^{-1}]A}([S^{-1}]M, N)$ tal que $\sigma \circ \mu_M = \phi$.*

Dem.
Sean $M \in A$-**Mod**, $N \in [S^{-1}]A$-**Mod**, y $\phi \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ (N puede ser considerado como A-módulo). Considerando que $[S^{-1}]A \in$ **Mod**-A, sea $\hat{\sigma} : [S^{-1}]A \times M \longrightarrow N$ dada por $\hat{\sigma}(x,m) = x\phi(m)$. Veamos que $\hat{\sigma}$ es biaditiva. Con este fin, sean $x, y \in [S^{-1}]A$, $m_1, m_2 \in M$ y $\lambda \in A$.

(i) $\hat{\sigma}(x+y,m_1)=(x+y)\phi(m_1)=x\phi(m_1)+y\phi(m_1)=\hat{\sigma}(x,m_1)+\hat{\sigma}(y,m_1)$.

(ii) $\hat{\sigma}(x,m_1+m_2)=x\phi(m_1+m_2)=x(\phi(m_1)+\phi(m_2))=x\phi(m_1)+x\phi(m_2)=\hat{\sigma}(x,m_1)+\hat{\sigma}(x,m_2)$.

(iii) $\hat{\sigma}(x\lambda,m_1)=(x\lambda)\phi(m_1)=x(\lambda\phi(m_1))=x\phi(\lambda m_1)=\hat{\sigma}(x,\lambda m_1)$.

De (i), (ii) y (iii) se sigue que $\hat{\sigma}$ es biaditiva. En, consecuencia, por la Propiedad Universal del Producto Tensorial se sigue que, existe un único $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left([S^{-1}]M,N\right)$ tal que siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} {[S^{-1}]A \times M} \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[d, "h"'] & N \\ {[S^{-1}]M} \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}, \text{ donde } \quad h(a,x)=a\otimes x \in [S^{-1}]M, \forall a \in [S^{-1}]A, x \in [S^{-1}]M. \tag{1}$$

Ahora, tenemos que $\left[S^{-1}\right]A$ es $\left(\left[S^{-1}\right]A,A\right)$-bimódulo y así $\left[S^{-1}\right]M$ tiene estructura de $\left[S^{-1}\right]A$-**Mod** y esta estructura es mediante la multiplicación siguiente: Para cada $s \in \left[S^{-1}\right]A$ y $x\otimes m \in \left[S^{-1}\right]M$, $s(x\otimes m) := (sx)\otimes m$. Afirmación: $\sigma \in \mathrm{Hom}_{[S^{-1}]A}\left([S^{-1}]M,N\right)$.

Dem. Sea $s \in \left[S^{-1}\right]A$ y $x\otimes m \in \left[S^{-1}\right]M$. Tenemos $\sigma(s(x\otimes m)) = \sigma((sx)\otimes m) = \sigma\circ h(sx,m) = \hat{\sigma}(sx,m) = (sx)\phi(m) = s(x\phi(m)) = s\hat{\sigma}(x,m) = s\sigma\circ h(x,m) = s\sigma(x\otimes m)$. Por lo tanto,

$$\sigma \in \mathrm{Hom}_{[S^{-1}]A}\left([S^{-1}]M,N\right).$$

Finalmente, por (1) se sigue que para cada $m \in M$, $\sigma\circ\mu_M(m) = \sigma(1\otimes m) = 1\phi(m) = \phi(m)$. Por tanto, $\sigma\circ\mu_M = \phi$. Veamos que σ es única, para ellos supongamos que existe $\sigma' \in \mathrm{Hom}_{[S^{-1}]A}\left([S^{-1}]M,N\right)$ tales que $\sigma'\circ\mu_M = \phi$. Entonces, para cada $x\otimes m \in \left[S^{-1}\right]M$ tenemos:

$$\sigma'(s\otimes m) = \sigma'(s(1\otimes m)) = s\sigma'(1\otimes m) = s\phi(m) = s\sigma(1\otimes m) = \sigma(s\otimes m).$$

Por lo tanto σ es único.

Q.E.D

Dado, $M \in A$-**Mod**. Consideremos la siguiente relación en $S\times M$:

$$(s,m)\sim(t,n) \text{ en } S\times M \iff \text{existen } c,d\in A \text{ tales que } cs=dt\in S \text{ y } cm=dn.$$

Proposición 3.2.3. *Dado $M \in A$-**Mod**, $\sim$ es relación de equivalencia.*

Denotemos al conjunto cociente generado por $\sim$ como $\mathcal{M} = S\times M/\sim$.

Proposición 3.2.4. *Dado $M \in A$-**Mod**. $S\times M/\sim$ tiene estructura de A-módulo izquierdo con las siguientes operaciones:*

- *Para $[(s,m)],[(t,n)] \in \mathcal{M}$, definimos $(s,m)+(t,n) := (cs, cm+dn)$, para algún $c\in A$, $d\in S$ con $cs=dt\in S$ (usando S_1)*
- *Para cada $[(s,m)]\in\mathcal{M}$, $[(t,a)]\in\left[S^{-1}\right]A$, definimos $(t,a)\cdot(s,m) := (ut,cm)$, para algún $c\in A$, $u\in S$ con $cs=ua$.*

Proposición 3.2.5. *Para cada $M \in A$-**Mod**, $[S^{-1}]M \cong \mathcal{M}$.*

Corolario 3.2.6. *Sea $M \in A$-**Mod**. Entonces*

$$\mathrm{Nu}(\mu_M) = \{m\in M : \text{ existe } s\in S \text{ tal que } sm=0\} = \{m\in M : S\cap\mathrm{ann}(m)\neq\emptyset\}$$

.

Dem.
Sea $M \in A$-**Mod**, y sea $f \in \mathrm{Hom}_a(\left[S^{-1}\right] M, \mathcal{M})$ el isomorfismo previo. Tenemos

$$\begin{aligned} m \in \mathrm{Nu}(\mu_M) &\iff 1 \otimes m = \mu_M(m) = 0 \\ &\iff [(1,m)] = f(1 \otimes m) = [(1,0)] (\text{pues f es iso}). \\ &\iff (1,m) \sim (1,0) \\ &\iff \text{ existen } c, d \in A \text{ tales que } c = c(1) = d(1) = d \in S \text{ y } cm = d(0) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Nu}(\mu_M) = \{m \in M : \text{existe } s \in S \text{ tal que } sm = 0\}$.

Q.E.D

Sea $r : A$-**Mod** $\longrightarrow A$-**Mod** dada por $r(M) = \mathrm{Nu}(\mu_M)$.

Proposición 3.2.7. $r \in A$-pr.

Dem.
Claramente, $r(M) \leq M$. Sea $f : M \longrightarrow N$ homomorfismo. Para cada $f(m) \in f\left(r(M)\right)$ existe $s \in S \cap \mathrm{ann}(m)$ tal que $f(sm) = 0$, implica que $f(m) \in r(N)$. Por lo tanto, $r \in A$-pr.

Q.E.D

Definición 3.2.8. *Sea $M \in A$-**Mod**. Diremos que M es un módulo de S-torsión si $M \in \mathbb{T}_r$ y es un módulo S-libre de torsión si $M \in \mathbb{F}_r$*

Lema 3.2.9. *r es un radical idempotente.*

Dem.
Sabemos que $r(r(M)) \leq r(M)$. Así, $m \in r(M)$ implica que existe $s \in S$ tal que $sm = 0$, por lo que $m \in r(r(M))$. Por lo tanto, r es idempotente. Ahora, si $m + r(M) \in r(M/r(M))$, entonces existe $s \in S$ tal que $s(m + r(M)) = r(M)$, por lo que $sm \in r(M)$. Se sigue que existe $s' \in S$ tal que $s'(sm) = 0$, esto implica que $(s's)m = 0$. En consecuencia, $m \in r(M)$. Por lo tanto, r es radical.

Q.E.D

Así, $(\mathbb{T}_r, \mathbb{F}_r)$ es una teoría de torsión. La asociación $F : A$-**Mod** $\longrightarrow \left[S^{-1}\right] A$-**Mod** que envía a cada $M \in A$-**Mod** el módulo $\left[S^{-1}\right] M \in \left[S^{-1}\right] A$-**Mod**. Un hecho básico, es que el funtor es exacto, o en otras palabras:

Proposición 3.2.10. *$\left[S^{-1}\right] A$ es plano como A-módulo derecho.*

Dem.
Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ sucesión exacta. Entonces,

$$\left[S^{-1}\right] A \otimes_A M \xrightarrow{1 \otimes f} \left[S^{-1}\right] A \otimes_A N \xrightarrow{1 \otimes g} \left[S^{-1}\right] A \otimes_A L \longrightarrow 0 \text{ es exacta.}$$

Veamos que $1 \otimes f = F(f) : \left[S^{-1}\right] A \otimes_A M \longrightarrow \left[S^{-1}\right] A \otimes_A N$ que esta definida como $1 \otimes f = F(f)\left([(s,m)]\right) = [(s, f(m))]$ para cada $[(s,m)] \in \left[S^{-1}\right] A \otimes_A M$ es inyectiva. Supongamos que $F(f)([(s,m)]) = [(1,0)]$, entonces $[(s, f(m))] = [(1,0)]$, es decir $(s, f(m)) \sim (1,0)$. Por tanto, existen $c, d \in A$ tal que $cs = d \in S$ y $cf(m) = 0$. Ahora, $f(cm) = 0$ y $cs \in S \Rightarrow cm = 0$, pues f es inyectiva. Se concluye que $(s,m) \sim (1,0)$. Por lo tanto, $F(f)$ es inyectivo. Así, $\left[S^{-1}\right] A$ es plano.

Q.E.D

Proposición 3.2.11. *Sea $M \in A$-**Mod**.*

(1) *Si M es S-torsión, entonces $\left[S^{-1}\right] M = 0$.*

(2) *Si M es S-libre de torsión, entonces μ_M es inyectiva.*

Dem.
(1) Supongamos que M es S-torsión. Sea $(s,m) \in \left[S^{-1}\right] M$. Tenemos por hipótesis que $M = \mathrm{Nu}(\mu_M)$, así, existe $t \in S$ tal que $tm = 0$, se sigue que $(t)s = (ts)1 \in S$, $(t)m = (ts)0$ y $t, ts \in A$. Por tanto $(s,m) \sim (1,0)$. Por lo tanto, $\left[S^{-1}\right] M = 0$.

(2) Supongamos que M es S-libre de torsión. Se sigue inmediatamente que μ_M es inyectivo, pues $\mathrm{Nu}(\mu_M) = 0$.

Q.E.D

Corolario 3.2.12. *Si $M \in \left[S^{-1}\right] A$-**Mod**, entonces μ_M es isomorfismo.*

Dem.
Supongamos que $M \in \left[S^{-1}\right] A$-**Mod**, y sea $x \otimes m \in \left[S^{-1}\right] M$. Podemos considerar a μ_M como $\left[S^{-1}\right] A$-homomorfismo. Tenemos que $x \otimes m = x(1 \otimes m) = x\mu_M(m) = \mu_M(xm)$. Por lo tanto μ_M es sobre, se concluye que μ_M es isomorfismo (por (2) de la proposición previa).

Q.E.D

Definición 3.2.13. *Sea $M \in A$-**Mod**.*

(i) *M es S-inyectivo si para cada ideal izquierdo I de A tal que $I \cap S \neq \emptyset$ y cada homomorfismo $\alpha : I \longrightarrow M$, existe $x \in M$ tal que $\alpha(a) = ax$, para cada $a \in I$.*

(ii) *M es S-divisible si $M = sM$, para cada $s \in S$.*

Proposición 3.2.14. *Sea $M \in A$-**Mod**. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) *$M \cong \left[S^{-1}\right] M$.*

(b) *M es S-libre de torsión y S-divisible.*

(c) *M es S-libre de torsión y S-inyectiva.*

Dem.
Sea $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$.

(1) Veamos que $(a) \Rightarrow (b)$. Para ello, supongamos que (a) se cumple, es decir, $M \cong \left[S^{-1}\right] M$. Sea $m \in \mathrm{Nu}(\mu_M)$, entonces existe $s \in S$ tal que $sm = 0$. Ahora, por hipótesis se sigue que $M \in \left[S^{-1}\right] A$-**Mod**, así $[(s,1)] \cdot (sm) = 0$, esto implica que $([(s,1)] \cdot s)m = ([(s,s)])m = m = 0$. Por lo tanto, M es S-libre de torsión. Ahora, para cada $m \in M$ y $s \in S$, $m = [(s,s)] = s[(1,s)]m \in sM$. Se concluye que M es S-divisible. Por lo tanto, $(a) \Rightarrow (b)$.

(2) Veamos que $(b) \Rightarrow (a)$. Para ello, supongamos que (b) se cumple, es decir, M es S-libre de torsión y S-divisible. Por ser M, S-libre de torsión, se sigue que μ_M es inyectiva. Ahora, para cada $[(s,a)] \otimes m \in \left[S^{-1}\right] M$ tenemos:

$$[(s,a)] \otimes m = ([(s,1)][(1,a)]) \otimes m = ([(s,1)]a) \otimes m = [(s,1)] \otimes (am).$$

Por ser M, S-divisible, se sigue que existe $m' \in M$ tal que $am = sm'$. Así

$$[(s,a)] \otimes m = [(s,1)] \otimes (sm') = ([(s,1)]s) \otimes m' = [(s,s)] \otimes m' = 1 \otimes m'$$

Por lo tanto, μ_M es sobre. En consecuencia (a) se cumple.

(3) Veamos $(b) \Rightarrow (c)$. Supongamos que M es S-libre de torsión, y S-divisible. Nos resta mostrar que M es S-inyectiva. Sea I ideal izquierdo de A tal que $I \cap S \neq \emptyset$ y sea $\alpha : I \longrightarrow M$ homomorfismo. Como M es S-divisible y $I \cap S \neq \emptyset$, sea $s \in I \cap S$, $\alpha(s) \in M = sM$. Se sigue que existe $m \in M$ tal que $\alpha(s) = sm$. Sea $a \in I$. Por (S_1) se tiene que $As \cap Sa \neq \emptyset$, así, existe $t \in S$, $b \in A$ tales que $bs = ta$. Entonces $t\alpha(a) = \alpha(ta) = \alpha(bs) = b\alpha(s) = bsm = tam$. Esto implica que $\alpha(a) - am \in \mathrm{Nu}(\mu_M) = 0$. Por lo tanto, $\alpha(a) = am$, es decir, M es S-inyectiva.

(4) Veamos $(c) \Rightarrow (b)$. Supongamos que M es S-libre de torsión, y S-inyectiva. Sea $s \in S$, $m \in M$. Definamos $\alpha : As \longrightarrow M$ por $\alpha(as) = am$. Mostremos que α esta bien definida y es homomorfismo. Si $as = bs$, entonces existe $t \in S$ tal que $ta = tb$, se sigue que $tam = tbm$, por lo que $am - bm \in \mathrm{Nu}(\mu_M) = 0$. Por lo que, $am = bm$, esto prueba que α esta bien definido y por definición se sigue inmediatamente que α es homomorfismo. Por ser M, S-inyectivo se sigue que existe $m' \in M$ tales que $am = \alpha(as) = (as)m'$, en particular tomando $a = 1$, se tiene $m = sm' \in sM$. Por lo tanto, $M = sM$, es decir, M es S-divisible.

De (1)-(4) se concluye lo deseado.

Q.E.D

Ahora, veamos otra manera de visualizar un módulo de fracciones. Para cada $(s, m) \in S \times M$ consideremos $\sigma_{(s,m)} : As \longrightarrow M/r(M)$ dada por $\sigma_{(s,m)}(as) = am + r(M)$.

Proposición 3.2.15. *Para $(s, m) \in S \times M$, $\sigma_{(s,m)}$ es un A-homomorfismo.*

Dem.
Sea $(s, m) \in S \times M$. Veamos que $\sigma_{(s,m)}$ esta bien definida. Sean $as = bs$. Entonces, $(a - b)s = 0$. Por ser S conjunto denominador se sigue que existe $t \in S$ tal que $ta = tb$. Así,

$$(ta)m = (tb)m \Rightarrow t(am - bm) = 0 \Rightarrow am - bm \in \mathrm{Nu}\,(\mu_M)$$

Se sigue que $\sigma_{(s,m)}\,(as) = am + r(M) = bm + r(M) = \sigma_{(s,m)}\,(bs)$, es decir, $\sigma_{(s,m)}$ esta bien definido. Ahora, sean $a \in A$, $xs, ys \in As$.

$$\begin{aligned}\sigma_{(s,m)}\,(xs + a(ys)) &= \sigma_{(s,m)}\,((x + (ay))s) = (x + ay)m + r(M) = xm + (ay)m + r(M)\\ &= xm + r(M) + a(ym) + r(M) = \sigma_{(s,m)}(xs) + a\sigma_{(s,m)}(ys).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sigma_{(s,m)}$ es A-homomorfismo.

Q.E.D

El resultado anterior nos dice que a cada par $(s, m) \in S \times M$ le podemos asociar un A-homomorfismo, entonces nos cuestionamos; ¿y qué pasa con estos homomorfismos si $(s, m) \sim (t, n)$?

Proposición 3.2.16. *$(s, m) \sim (t, n)$ si y solo si existe $u \in S$ tal que $\sigma_{(s,m)} = \sigma_{(t,n)}$ en Au.*

Dem.
Sean $(s, m), (t, n) \in S \times M$ tales que $(s, m) \sim (t, n)$. Entonces existen $c, d \in A$ tales que

(1) $u = cs = dt \in S$.

(2) $cm = dn$.

Por (1) se tiene que $u \in As \cap At$, entonces $Au \subseteq As \cap At$. Ahora, sea $xu \in Au$, esto es, $xu = (xc)s = (xd)t$. Así,

$$\sigma_{(s,m)}(xu) = (xc)m + r(M) = x(cm) + r(M) \quad \text{y} \quad \sigma_{(t,n)}(xu) = (xd)n + r(M) = x(dn) + r(M)$$

Por (2) se sigue que $\sigma_{(s,m)}(xu) = \sigma_{(t,n)}(xu)$, es decir, $\sigma_{(s,m)} = \sigma_{(t,n)}$ en Au. El reciproco es inmediato

Q.E.D

Ahora, si I es ideal izquierdo y $f \in \mathrm{Hom}_A(I, M/r(M))$, ¿existe $s \in S$ y $m \in M$ tal que $\sigma_{(s,m)} = f$, en $As \subseteq I$? La respuesta a esta pregunta es afirmativa cuando consideramos ideales izquierdos I con $I \cap S \neq \emptyset$. En este caso, sí $f \in \mathrm{Hom}_A(I, M/r(M))$, entonces, existe $s \in I \cap S$, y así $As \subseteq I$. por tanto, para $xs \in As$ tenemos que

$$f(xs) = xf(s) = \sigma_{(s,f(s))}(xs).$$

Esto parece indicar que existe una conexión del módulo de fracciones con límites directos de ciertos homomorfismos, pero claramente primero necesitamos de una familia de ideales adecuado. Como r es un radical exacto izquierdo, entonces $\mathcal{L}_{\mathbb{T}_r}$ es un filtro de Gabriel, al que denotaremos como G_0, es decir, $G_0 = \mathcal{L}_{\mathbb{T}_r}$. Ahora, veamos cómo es G_0

$$\begin{aligned} G_0 &= \{{}_A I : A/I \in \mathbb{T}_r\} = \{I\} = \{I : r(A/I) = A/I\} = \left\{I : \mathrm{Nu}\left(\mu_{A/I}\right) = A/I\right\} \\ &= \{I : \forall\, a \in A,\, S \cap \mathrm{ann}(a+I) \neq \emptyset\} \\ &= \{I : \forall\, a \in A,\ (I : a) \cap S \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$G_0 = \{I : \forall\, a \in A,\ (I : a) \cap S \neq \emptyset\}.$$

Como para cada $s \in S$, $a \in A$ tenemos que $As \cap Sa \neq \emptyset$, entonces existen $x \in A$, $t \in S$ tales que $ta = xs \in As$, es decir, $t \in (As, a) \cap S$, lo que es lo mismo $As \in G_0$. Así, G_0 es una familia adecuada para considerar un límite directo, para ello consideremos el orden opuesto a la contención directa en G_0 y la denotaremos mediante $\leq$. Ahora consideremos la familia $\{\mathrm{Hom}_A(I, M/r(M))\}_{I \in G_0}$, y para cada $I, J \in G_\circ$ con $I \leq J$ sea $\alpha_{IJ} : \mathrm{Hom}_A(I, M/r(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(J, M/r(M))$ definido como:

$$\alpha_{IJ}(f) = f \restriction_J \ \text{ para cada } f \in \mathrm{Hom}_A(I, M/r(M)).$$

Es fácil comprobar que dicha familia junto con los morfismos dados forman un sistema directo en $\mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$, por lo tanto, existe el límite directo, esto es, existe

$$\varinjlim_{I \in G_0} (\mathrm{Hom}_A(I, M/r(M))).$$

Sabemos que en principio es un grupo conmutativo, sin embargo, se puede probar que tiene estructura de A-módulo izquierdo. Hasta aquí hemos construido un A-módulo izquierdo mediante la familia G_0 y por los resultados previos naturalmente tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.2.17. $\left[S^{-1}\right] M \cong \varinjlim_{I \in G_0} (\mathrm{Hom}_A(I, M/r(M)))$.

Dem.
Sea $\varphi : \left[S^{-1}\right] M \longrightarrow \varinjlim_{I \in G_\circ} (\mathrm{Hom}_A(I, M/r(M)))$ dada por $\varphi([(s,m)]) = [(\sigma_{(s,m)}, As)]$. Veamos que φ es A-isomorfismo.

(1) Por la primera proposición φ está bien definida y es fácil mostrar que es un A-homomorfismo.

(2) Por la segunda proposición φ es sobre.

(3) Mostremos que es inyectiva. Sean $[(s,m)], [(t,n)] \in \left[S^{-1}\right] M$ tales que $\varphi([(s,m)]) = \varphi([(s,n)])$. Entonces $[(\sigma_{(s,m)}, As) = [(\sigma_{(t,n)}, At)$, es decir, existe $I \in G_\circ$ tales que $\sigma_{(s,m)} = \sigma_{(t,n)}$ en I, es decir, $(s,m) \sim (t,n)$ por la primera proposición.

Q.E.D

3.3. Módulos de cocientes sobre filtros de Gabriel

Sea A un anillo, $M \in A$-**Mod** y $\mathcal{G}$ filtro de Gabriel. La relación $\leq$ en $\mathcal{G}$ que consiste en la relación inversa $I \leq J \iff J \subset I$ es un orden parcial en $\mathcal{G}$. Así, $(\mathcal{G}, \leq)$ es un copo dirigido. Ahora, recordemos que para cada $I \in \mathcal{I}(A)$, $I \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{Mod})$, de modo que $\mathrm{Hom}_A(I, M) \in \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$. Ahora, para cada $I, J \in \mathcal{G}$ con $I \leq J$ consideremos la siguiente asignación:

$$\begin{aligned}\alpha_{IJ} : &\mathrm{Hom}_A(I, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(J, M) \text{ dada por} \\ &\alpha_{IJ}(g) = g \restriction_J\end{aligned}$$

Entonces, $\big(\mathrm{Hom}_A(I, M), \alpha_{IJ}\big)$ es un sistema directo, por lo que $\varinjlim_{I\in\mathcal{G}} \mathrm{Hom}_A(I, M)$ existe y es único. Denotaremos a este límite directo como $M_{(\mathcal{G})}$. De la subsección 1.3.3, recordemos que los elementos de $M_{(\mathcal{G})}$ son de la forma $[(f, I)]$, donde $I \in \mathcal{G}$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$. También recordemos que f representa a $[(f, I)]$. Además, $[(f, I)] = [(g, J)]$ en $M_{(\mathcal{G})}$ si y solo si f y g coinciden en algún $K \in \mathcal{G}$ con $K \subset I \cap J$.

Sabemos que a $A_{(\mathcal{G})}$ se le puede dar estructura de anillo y que $M_{(\mathcal{G})} \in \mathrm{Obj}\,\big(A_{(\mathcal{G})}\text{-}\mathbf{Mod}\big)$ como en $\mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{Mod})$. Para obtener esto, se hace uso del siguiente lema:

Lema 3.3.1. *Si $I, J \in \mathcal{G}$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(I, A)$, entonces $\varphi^{-1}(J) \in \mathcal{G}$.*

La suma en los grupos abelianos $A_{(\mathcal{G})}$ y $M_{(\mathcal{G})}$ esta dada como sigue:

$$[(f, I)] + [(g, J)] = [(\alpha_{IK}(f) + \alpha_{JK}(g), K)], \qquad \text{para } I, J \leq K.$$

La siguiente operación binaria es quien le da la estructura que deseamos a $A_{(\mathcal{G})}$ y $M_{(\mathcal{G})}$.

$$\bullet_M : A_{(\mathcal{G})} \times M_{(\mathcal{G})} \longrightarrow M_{(\mathcal{G})} \qquad \text{dada por}$$

$$a \bullet_M x = [(\xi_x \circ \lambda_a, \lambda_a^{-1}(J))], \qquad \text{donde } a = [(\lambda_a, I)],\ x = [(\xi_x, J)]$$

Representado en un diagrama es:

$$\begin{tikzcd} \lambda_a^{-1}(J) \arrow[r, "\lambda_a"] \arrow[rr, bend right, "\xi_x\circ\lambda_a"'] & J \arrow[r, "\xi_x"] & M \end{tikzcd}$$

Con estas operaciones tenemos que $(A_{(\mathcal{G})}, +, \bullet_A)$ es un anillo y $(M_{(\mathcal{G})}, +, \bullet_M)$ es un $A_{(\mathcal{G})}$-módulo. Generalmente denotaremos $\bullet_M$ con $\bullet$, es decir, haremos un abuso de notación. Ahora, recordemos que para cada $m \in M$, $f_m : A \longrightarrow M$ dado por $f_m(a) = am$ es un A-homomorfismo. Más aún, el siguiente A-homomorfismo $\Phi : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A, M)$ dado por $\Phi(m) = f_m$ es un isomorfismo de grupos abelianos, esto nos permite la definicion del siguiente homomorfismo de grupos $\varphi_M : M \longrightarrow M_{(\mathcal{G})}$ que está definido como $\varphi_M(m) = [(f_m, A)]$ para todo $m \in M$.

Si $M = A$, entonces φ_A es un homomorfismo de anillos, este último nos permite darle a $M_{(\mathcal{G})}$ estructura de A-módulo izquierdo, cuyo producto esta dado por $a \cdot [(f, I)] = \varphi_A(a) \bullet [(f, I)]$. De esta manera también obtenemos que φ_M es un A-homomorfismo.

Ahora, consideremos la siguiente asignación: $F : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A_{(\mathcal{G})}\text{-}\mathbf{Mod}$ donde

- Para cada $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{Mod})$, $F(M) = M_{(\mathcal{G})}$.
- Para cada $f \in \mathrm{Hom}_A\,(M, N)$, $F(f) := f_{(\mathcal{G})}$, donde $f_{(\mathcal{G})} : M_{(\mathcal{G})} \longrightarrow N_{(\mathcal{G})}$ y está definido como

$$f_{(\mathcal{G})}\,([(\varphi, I)]) = [(f \circ \varphi, I)], \text{ para cada } [(\varphi, I)] \in M_{(\mathcal{G})}.$$

Resulta que F es un funtor (covariante) exacto izquierdo. Consideremos al funtor olvidadizo $F' : A_{(\mathcal{G})}$-**Mod** $\longrightarrow A$-**Mod** que manda cada $A_{(\mathcal{G})}$-módulo izquierdo a sí mismo pero considerado con la estructura de A-módulo, así obtenemos el funtor $L = F' \circ F : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$. Por otro lado, sea t el radical izquierdo asociado al filtro de Gabriel, es decir

$$t = \mathrm{Tr}_{\tau_{\mathcal{G}}} = \mathrm{Rej}_{R(\tau_{\mathcal{G}})}$$

Lema 3.3.2. $\mathrm{Nu}(\varphi_M) = t(M)$.

Dem.
Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathrm{Nu}(\varphi_M) &= \{m \in M : \varphi_M(m) = [(0, A)]\} = \{m \in M : [(f_m, A)] = [(0, A)]\} \\ &= \{m \in M : \text{ existe } I \in \mathcal{G} \text{ tal que } f_m \restriction_I = 0\} \\ &= \{m \in M : \text{ existe } I \in \mathcal{G} \text{ tal que } Im = 0\}.\end{aligned}$$

($\subseteq$) Sea $m \in \mathrm{Nu}(\varphi_M)$. Existe $I \in \mathcal{G}$ tal que $Im = 0$, entonces $I \subseteq \mathrm{ann}(m)$. Por ser $\mathcal{G}$ filtro de Gabriel se tiene que $\mathrm{ann}(m) \in \mathcal{G}$, por tanto $\mathrm{Nu}(\varphi_M) \in \tau_{\mathcal{G}}$, así, considerando la inclusión $i : Nu(\varphi_M) \hookrightarrow M$, se sigue que $\mathrm{Nu}(\varphi_M) \leq \mathrm{Tr}_{\tau_{\mathcal{G}}}(M)$. Por lo tanto, $\mathrm{Nu}(\varphi_M) \subseteq \mathrm{Tr}_{\tau_{\mathcal{G}}}(M) = t(M)$.

($\supseteq$) Sea $m \in t(M)$. Existen $M_1, \ldots, M_l \in \tau_{\mathcal{G}}$, $f_i : M_i \longrightarrow M$, $i \in \{1, \ldots l\}$, y $m_i \in M_i$ tales que $m = f_1(m_1) + \cdots + f_l(m_l)$. Para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$, $\mathrm{ann}(m_i) \in \mathcal{G}$, entonces sea $K = \bigcap_{i=1}^{l} \mathrm{ann}(m_i)$. Así,

$$\forall a \in K, \quad am = \sum_{i=1}^{l} f_i(am_i) = \sum_{i=1}^{l} f_i(0) = 0.$$

Entonces $m \in \mathrm{Nu}(\varphi_M)$. Por lo tanto, $\mathrm{Tr}_{\tau_{\mathcal{G}}}(M) \subseteq \mathrm{Nu}(\varphi_M)$.

Se concluye que $\mathrm{Nu}(\varphi_M) = t(M)$.

Q.E.D

Lema 3.3.3. *$M \in \mathbb{T}_t$ si y solo si $M_{(\mathcal{G})} = 0$.*

Dem.
Recordemos que $t = \mathrm{Tr}_{\tau_{\mathcal{G}}} = \mathrm{Rej}_{R(\tau_{\mathcal{G}})}$. Si $M_{(\mathcal{G})} = 0$, entonces $\varphi_M = 0$, esto es, $\mathrm{Nu}\,\varphi_M = M = t(M)$. Por tanto, supongamos que $t(M) = M = \mathrm{Nu}(\varphi_M)$, por lo que $\varphi_M = 0$. Sea $x \in M_{(\mathcal{G})}$ y supongamos que es representado por $\xi : I \longrightarrow M$, es decir, $x = [(\xi, I)]$ con $I \in \mathcal{G}$. Afirmamos que $\mathrm{Nu}(\xi) \in \mathcal{G}$. Para mostrar la veracidad de esto, sea $a \in I$. Existe $I_a \in \mathcal{G}$ tal que $I_a \xi(a) = 0$. Tomemos $J = \sum_{a \in I} I_a a$, y sea $b \in J$. Existen $a_1, \ldots, a_l \in I$, y $c_i \in I_{a_i}$, $i \in \{1, \ldots, l\}$ tales que $b = c_1 a_1 + \cdots + c_l a_l$, se sigue que:

$$\xi(b) = \sum_{i=1}^{l} c_i \xi(a_i) = 0 \Rightarrow J \subseteq \mathrm{Nu}(\xi).$$

Mas aún, dado $b \in I_a$, se tiene que $ba \in I_a a \subseteq J$, es decir, para cada $a \in I$, $I_a \subseteq \big(J : a\big)$, por lo que usando el hecho de que $\mathcal{G}$ es filtro de Gabriel se sigue que para toda $a \in I$, $\big(J : a\big) \in \mathcal{G}$, en consecuencia $J \in \mathcal{G}$. Así, $\mathrm{Nu}(\xi) \in \mathcal{G}$. En consecuencia, ξ es cero para algún $K \in \mathcal{G}$, es decir, $x = [(\xi, I)] = [(0, A)]$. Por lo tanto, $M_{(\mathcal{G})} = 0$.

Q.E.D

A los elementos de $\mathbb{T}_t$ se llaman **$\mathcal{G}$-módulos de torsión**.

Proposición 3.3.4. *Si $x \in M_{(\mathcal{G})}$ es representado por $\xi : I \longrightarrow M$ con $I \in \mathcal{G}$, entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "i_I"] \arrow[d, "\xi"'] & A \arrow[d, "\beta_x"] \\ M \arrow[r, "\varphi_M"'] & M_{(\mathcal{G})} \end{tikzcd}$$

donde $\beta_x(a) = a \cdot x$, $\forall\ a \in A$.

Dem.
Sea $x = [(\xi, I)] \in M_{(\mathcal{G})}$ y $a \in I$.

(1) $\varphi_M \circ \xi(a) = \varphi_M(\xi(a)) = [(f_{\xi(a)}, A)]$.

(2) $\beta_x \circ i_I(a) = \beta_x(a) = a \cdot x = \varphi_A(a)[(\xi, I)] = [(f_a, A)][(\xi, I)] = [(\xi \circ f_a, f_a^{-1}(I))]$.

Ahora, para cada $b \in f_a^{-1}(I) \cap I$, tenemos que $f_{\xi(a)}(b) = b\xi(a)$, y $\xi \circ f_a(b) = \xi(ba) = b\xi(a)$. En consecuencia,

$$[(f_{\xi(a)}, A)] = [(\xi \circ f_a, f_a^{-1}(I))].$$

Por lo tanto, $\varphi_M \circ \xi = \beta_x \circ i_I$, es decir, el diagrama deseado conmuta.

Q.E.D

Lema 3.3.5. $M_{(\mathcal{G})}/\operatorname{Im}(\varphi_M) \in \mathbb{T}_t$.

Dem.
Sea $\overline{m} = [(\xi, I)] + \operatorname{Im}(\varphi_M) \in M_{(\mathcal{G})}/\operatorname{Im}(\varphi_M)$.

$$\operatorname{ann}(\overline{m}) = \Big\{a \in A : a\big([(\xi, I)] + \operatorname{Im}(\varphi_M)\big) = 0\Big\} = \Big\{a \in A : a \cdot [(\xi, I)] \in \operatorname{Im}(\varphi_M)\Big\}$$

Ahora, por la proposición previa, tenemos que para cada $a \in I$, $[(f_{\xi(a)}, A)] = a \cdot [(\xi, I)]$, esto implica que $a \cdot [(\xi, I)] \in \operatorname{Im}(\varphi_M)$, para todo $a \in I$. Se sigue que $I \subseteq \operatorname{ann}(\overline{m})$. Dado que $I \in \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ es filtro de Gabriel se sigue que $\operatorname{ann}(\overline{m}) \in \mathcal{G}$. Por lo tanto, $M_{(\mathcal{G})}/\operatorname{Im}(\varphi_M) \in \mathbb{T}_t$

Q.E.D

Hasta aquí, a partir de un A-módulo M, hemos construido un nuevo A-módulo $M_{(\mathcal{G})}$, nos preguntamos, ¿ aplicando este procedimiento de manera iterativa obtendremos más A-módulos diferentes (No isomorfos)? Procedamos a responder esta pregunta. Antes que nada no olvidemos que para $M, N \in A$-**Mod** con $M \cong N$, entonces $M_{(\mathcal{G})} = N_{(\mathcal{G})}$, ya que F es un funtor entre A-**Mod** y $A_{(\mathcal{G})}$-**Mod**. Ahora, tomemos $M \in A$-**Mod**, consideremos $L(M) = M_{(\mathcal{G})} \in A$-**Mod**, es esta manera tenemos derecho de aplicar F a $M_{(\mathcal{G})}$, así, $\big(M_{(\mathcal{G})}\big)_{(\mathcal{G})} \in A$- **Mod**, ¿cómo es este A-módulo? ¿ Qué relación tiene con $\big(A_{(\mathcal{G})}\big)_{(\mathcal{G})}$?

Lema 3.3.6. $\big(M_{(\mathcal{G})}\big)_{(\mathcal{G})} \cong (M/t(M))_{(\mathcal{G})}$.

Dem.
En virtud del primer teorema de isomorfismo, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow M/t(M) \longrightarrow M_{(\mathcal{G})} \longrightarrow M_{(\mathcal{G})}/\operatorname{Im}(\varphi_M) \longrightarrow 0.$$

Como F es exacto izquierdo, entonces la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow \Big(M/t(M)\Big)_{(\mathcal{G})} \longrightarrow \big(M_{(\mathcal{G})}\big)_{(\mathcal{G})} \longrightarrow \Big(M_{(\mathcal{G})}/\operatorname{Im}(\varphi_M)\Big)_{(\mathcal{G})}.$$

Dado que $\operatorname{Conu}(\varphi_M) \in \mathbb{T}_t$, entonces $\Big(M_{(\mathcal{G})}/\operatorname{Im}(\varphi_M)\Big)_{(\mathcal{G})} = 0$. Así, se obtiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \Big(M/t(M)\Big)_{(\mathcal{G})} \longrightarrow \Big(M_{(\mathcal{G})}\Big)_{(\mathcal{G})} \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, $\Big(M_{(\mathcal{G})}\Big)_{(\mathcal{G})} = \Big(M/t(M)\Big)_{(\mathcal{G})}$.

Q.E.D

Ahora, por el lema previo, la proposición anterior, y por ser t radical, tenemos que:

$$\Big[\big(M_{(\mathcal{G})}\big)_{(\mathcal{G})}\Big]_{(\mathcal{G})} \cong \Big[\big(M/t(M)\big)_{(\mathcal{G})}\Big]_{(\mathcal{G})} \cong \left[\frac{\big(M/t(M)\big)}{t\Big(M/t(M)\Big)}\right]_{(\mathcal{G})} \cong (M/t(M))_{(\mathcal{G})} = \big(M_{(\mathcal{G})}\big)_{(\mathcal{G})}.$$

Esto nos dice que a lo más podemos construir(siguiendo el proceso descrito previamente) dos módulos cocientes asociados a $\mathcal{G}$. Por esta razón, llamaremos a $M_{\mathcal{G}} := \big(M/t(M)\big)_{(\mathcal{G})}$ el módulo cociente de M asociado a $\mathcal{G}$. Nos gustaría que $A_{\mathcal{G}}$ sea un anillo y $M_{\mathcal{G}} \in A_{\mathcal{G}}$-**Mod**, para ellos consideremos el siguiente $a = [(\xi, I)] \in A_{\mathcal{G}}$, $[(\eta, J)] \in M_{\mathcal{G}}$ arbitrarios pero fijos. Ahora, para cada $N \in A$-**Mod**, sea $\pi_N : N \longrightarrow N/t(N)$, la proyección natural. Sabemos que t es radical, por lo que $\eta(t(J)) \leq t(M/t(M)) = 0$, por lo que $t(J) \subseteq \mathrm{Nu}(\eta)$. Por el teorema del factor existe un único $h_\eta : J/t(J) \longrightarrow M/t(M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\pi_J"'] & M/t(M) \\ J/t(J) \arrow[ur, "h_\eta"'] & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Sea $\iota_J : J \hookrightarrow A$ la inclusión. Por ser t exacto izquierdo tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathrm{Nu}(\varphi_A \circ \iota_J) &= \{a \in J : \pi_A \circ \iota_J(a) = t(A)\} = \{a \in J : a + t(A) = t(A)\} = \{a \in J : a \in t(A)\} \\ &= J \cap t(A) = t(J) \end{aligned}$$

Por el teorema del factor, se sigue que existe un único homomorfismo $g_J : J/t(J) \longrightarrow A/t(A)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, hook, "\iota_J"] \arrow[d, "\pi_J"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\ J/t(J) \arrow[urr, "g_J"'] & & \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Además, g_J es monomorfismo, pues $\mathrm{Nu}(g_J \circ \pi_J) = \mathrm{Nu}(g_J)$ (de hecho, la regla de asignación es $g_J(x + t(J)) = x + t(A)$, para todo $x + t(J) \in J/t(J)$). Esto quiere decir que existe un submódulo de $A/t(A)$ isomorfo a $J/t(J)$, de hecho, $\mathrm{Im}(g_J) \cong J/t(J)$. Veamos quién es la imagen de g_J;

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(g_J) &= \{g_J(a + t(J)) : a \in J\} = \{g_J \circ \pi_J(a) : a \in J\} \\ &= \{\pi_A \circ i(a) : a \in J\} = \{a + t(A) : a \in J\} \\ &= \frac{J + t(A)}{t(A)} \end{aligned}$$

Ahora, el homomorfismo $\hat{g}_J : J/t(J) \longrightarrow \mathrm{Im}(g_J)$ definido como $\hat{g}_J(j + t(J)) := g_J(j + t(J))$, para todo $i + t(J) \in \frac{J}{t(J)}$ es biyectivo. Claramente, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, hook, "\iota_J"] \arrow[d, "\pi_J"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\ J/t(J) \arrow[urr, tail, "g_J"'] \arrow[rr, tail, two heads, "\hat{g}_J"'] & & \mathrm{Im}(g_J) \arrow[u, hook, "\delta_J"'] \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Por otro lado, recordemos que tanto $A_{\mathcal{G}}$ como $M_{\mathcal{G}}$ son grupos abelianos con la suma ya antes descrita, con el fin de darles estructura de anillo y módulo, respectivamente. Consideremos el siguiente lema.

Lema 3.3.7. *Para todo $K \in \mathcal{G}$ con $t(A) \subseteq K$, se tiene que si $\xi : I \longrightarrow A/t(A)$ es morfismo con $I \in \mathcal{G}$, entonces $\xi^{-1}(K/t(A)) \in \mathcal{G}$.*

Dem.
Sea $K \in \mathcal{G}$ con $t(A) \subseteq K$, y $\xi : I \longrightarrow A/t(A)$ es morfismo con $I \in \mathcal{G}$. Tomemos $a \in K$ arbitraria pero fija.

$$\big(\xi^{-1}\,(K/t(A)) : a\big) = \big\{b \in A \mid ba \in \xi^{-1}(K/t(A))\big\} = \{b \in A \mid b\xi(a) \in K/t(A)\}$$

Sea $a' \in A$ tal que $\xi(a) = a' + t(A)$. Entonces por ser $\mathcal{G}$ filtro de Gabriel, se sigue que $K \cap I \in \mathcal{G}$ por lo que $(K \cap I : a') \in \mathcal{G}$. Para $b \in (K \cap I : a')$, implica que $ba' \in K \cap I \subseteq K$. Entonces

$$ba' + t(A) \in K/t(A) \quad \Rightarrow \quad b\xi(a) \in K/t(A) \quad \Rightarrow \quad b \in \left(\xi^{-1}\left(\frac{K}{t(A)}\right) : a\right).$$

Así,

$$(K \cap I : a') \subseteq \left(\xi^{-1}\left(\frac{K}{t(A)}\right) : a\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\xi^{-1}\left(\frac{K}{t(A)}\right) : a\right) \in \mathcal{G}.$$

Por la arbitrariedad de a, se concluye que $\xi^{-1}\left(\frac{K}{t(A)}\right) \in \mathcal{G}$.

Q.E.D

Ahora, en nuestro caso $K = J + t(A)$, y por el lema se sigue que $\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_J)) = \xi^{-1}\left(\frac{J+t(A)}{t(A)}\right) \in \mathcal{G}$, así, definamos la siguiente operación:

$$\bullet : A_{\mathcal{G}} \times M_{\mathcal{G}} \longrightarrow M_{\mathcal{G}} \text{ dada por } [(\xi, I)] \bullet [(\eta, J)] = \left[\left(h_\eta \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \hat{\xi}, \xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_J))\right)\right],$$

donde, $\hat{\xi} := \xi \restriction_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_J))}$.

Proposición 3.3.8. $\bullet$ *está bien definida.*

Dem.
Supongamos que $a = [(\xi, I)] = [(\xi', I')]$, y $x = [(\eta, J)] = [(\eta', J')]$. Para $K = I \cap I' \in \mathcal{G}$ se tiene que $\xi \restriction_K = \xi' \restriction_K$, similarmente para $L = J \cap J' \in \mathcal{G}$ se tiene que $\eta \restriction_L = \eta' \restriction_L$.

Tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\pi_J"'] & M/t(M) \\ J/t(J) \arrow[ur, "h_\eta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} J' \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "\pi_{J'}"'] & M/t(M) \\ J'/t(J') \arrow[ur, "h_{\eta'}"'] & \end{tikzcd}$$

Se sigue que para cada $a \in L$, $h_\eta(a + t(J)) = h_\eta \circ \pi_J(a) = \eta(a) = \eta'(a) = h_{\eta'} \circ \pi_{J'}(a) = h_{J'}(a + t(J'))$. Por lo tanto,

$$h_\eta\left(\frac{L + t(J)}{t(J)}\right) = h_{\eta'}\left(\frac{L + t(J')}{t(J')}\right)$$

.

Igualmente, tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, hook, "\iota_J"] \arrow[d, "\pi_J"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\ J/t(J) \arrow[urr, tail, "g_J"'] \arrow[rr, tail, two heads, "\hat{g}_J"'] & & \mathrm{Im}(g_J) \arrow[u, hook, "\delta_J"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} J' \arrow[r, hook, "\iota_{J'}"] \arrow[d, "\pi_{J'}"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\ J'/t(J') \arrow[urr, tail, "g_{J'}"'] \arrow[rr, tail, two heads, "\hat{g}_{J'}"'] & & \mathrm{Im}(g_{J'}) \arrow[u, hook, "\delta_{J'}"'] \end{tikzcd}$$

De modo que, $\delta_J \circ \hat{g}_J \circ \pi_J = \pi_A \circ \iota_J$ y $\delta_{J'} \circ \hat{g}_{J'} \circ \pi_{J'} = \pi_A \circ \iota_{J'}$. Así, para cada $a \in L$, tenemos

$$\begin{aligned} \delta_J \circ \hat{g}_J(a + t(J)) &= g_J(a + t(J)) = g_J \circ \pi_J(a) \\ &= \pi_A \circ \iota_J(a) = \pi_A(a) = \pi_A \circ \iota_{J'}(a) \\ &= g_{J'} \circ \pi_{J'}(a) = g_{J'}(a + t(J')) \\ &= \delta_{J'} \circ \hat{g}_{J'}(a + t(J')). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\delta_J \circ \hat{g}_J\left(\frac{L + t(J)}{t(J)}\right) = \delta_{J'} \circ \hat{g}_{J'}\left(\frac{L + t(J')}{t(J')}\right).$$

Como $\hat{g}_J$, $\hat{g}_{J'}$ son biyectivas y $\delta_J, \delta_{J'}$ son inyecciones, entonces $\delta_J \circ \hat{g}_J$ y $\delta_{J'} \circ \hat{g}_{J'}$ son inyectivas y $\hat{g}_J\left(\frac{L+t(J)}{t(J)}\right) = \frac{L+t(A)}{t(A)} = \hat{g}_{J'}\left(\frac{L+t(J')}{t(J')}\right)$, se concluye que

$$\frac{L+t(J)}{t(J)} \cong \frac{L+t(J')}{t(J')}.$$

Ahora, tenemos las siguientes sucesiones:

$$\xi^{-1}\left(\frac{J+t(A)}{t(A)}\right) \xrightarrow{\hat{\xi}} \frac{J+t(A)}{t(A)} \xrightarrow{\hat{g}_J^{-1}} \frac{J}{t(J)} \xrightarrow{h_\eta} \frac{M}{t(M)}$$

$$y$$

$$\xi'^{-1}\left(\frac{J'+t(A)}{t(A)}\right) \xrightarrow{\hat{\xi}'} \frac{J'+t(A)}{t(A)} \xrightarrow{\hat{g}_{J'}^{-1}} \frac{J'}{t(J')} \xrightarrow{h_{\eta'}} \frac{M}{t(M)}.$$

Tomemos $S = \xi^{-1}\left(\dfrac{L+t(A)}{t(A)}\right) \cap K \cap \xi'^{-1}\left(\dfrac{L+t(A)}{t(A)}\right)$, por ser $\mathcal{G}$ es filtro de Gabriel y el lema previo se sigue que $S \in \mathcal{G}$. Ahora, para cada $a \in S$, se tiene lo siguiente: $\hat{\xi}(a) = \xi(a) = \xi'(a) = \hat{\xi}'(a) \in \frac{L+t(A)}{t(A)}$, pues $S \subseteq K$. Sea $b \in L$, tal que $b + t(A) = \hat{\xi}(a) = \hat{\xi}'(a)$, así $\pi_A(b) = \hat{\xi}(a) = \hat{\xi}'(a)$. Dado que $L \subseteq J \cap J'$, y la conmutatividad de los diagramas previos se sigue que:

- $\delta_J \circ \hat{g}_J \circ \pi_J(b) = \pi_A \circ \iota_J(b) = \pi_A(b)$,
- $\delta_{J'} \circ \hat{g}_{J'} \circ \pi_{J'}(b) = \pi_A \circ \iota_{J'}(b) = \pi_A(b)$.

Se sigue que

$$\hat{g}_J \circ \pi_J(b) = \delta_J\left(\hat{g}_J \circ \pi_J(b)\right) = \pi_A(b) = \delta_J\left(\hat{g}_{J'} \circ \pi_{J'}(b)\right) = \hat{g}_{J'} \circ \pi_{J'}(b),$$

esto es, $\hat{g}_J(b + t(J)) = \pi_A(b) = \hat{\xi}(a) = \hat{\xi}'(a) = \hat{g}_{J'}(b + t(J'))$. Por la biyectividad de $\hat{g}_J$ y $\hat{g}_{J'}$ se tiene lo siguiente:

- $b + t(J) = \hat{g}_J^{-1}(\hat{\xi}(a))$.
- $b + t(J') = \hat{g}_{J'}^{-1}(\hat{\xi}'(a))$.

Ahora, por la conmutatividad de los primeros diagramas y el hecho de que $b \in L$, se sigue que:

$$\begin{aligned} h_\eta \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \hat{\xi}(a) &= h_\eta(b + t(J)) = h_\eta \circ \pi_J(b) \\ &= \eta(b) = \eta'(b) \\ &= h_{\eta'} \circ \pi_{J'}(b) = h_{\eta'}(b + t(J')) = h_{\eta'} \circ \hat{g}_{J'}^{-1} \circ \hat{\xi}'(a). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bullet$ esta bien definida.

Q.E.D

Proposición 3.3.9. $\bullet$ *en biaditiva.*

Dem.
Sean $[(\xi', I)], [(\xi, I')] \in A_{\mathcal{G}}$ y $[(\eta, J)], [(\eta', J')] \in M_{\mathcal{G}}$.

Acorde a 3.1 tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\pi_J"'] & M/t(M) \\ J/t(J) \arrow[ur, "h_\eta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} J' \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "\pi_{J'}"'] & M/t(M) \\ J'/t(J') \arrow[ur, "h_{\eta'}"'] & \end{tikzcd}$$

y por 3.2 tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, hook, "\iota_J"] \arrow[d, "\pi_J"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\ J/t(J) \arrow[urr, tail, "g_J"'] \arrow[rr, tail, two heads, "\hat{g}_J"'] & & \mathrm{Im}(g_J) \arrow[u, "\delta_J"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} J' \arrow[r, hook, "\iota_{J'}"] \arrow[d, "\pi_{J'}"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\ J'/t(J') \arrow[urr, tail, "g_{J'}"'] \arrow[rr, tail, two heads, "\hat{g}_{J'}"'] & & \mathrm{Im}(g_{J'}) \arrow[u, "\delta_{J'}"'] \end{tikzcd}$$

Veamos primero que $\bullet$ se distribuye por la derecha: sean $\hat{\xi} = \xi \restriction_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_J))}$, $\hat{\xi}' = \xi' \restriction_{\xi'^{-1}(\mathrm{Im}(g_J))}$, y sea $K = \xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_J)) \cap \xi'^{-1}(\mathrm{Im}(g_J))$, entonces

$$\begin{aligned} [(\xi, I)] \bullet [(\eta, J)] + [(\xi', I')] \bullet [(\eta, J)] &= \left[\left(h_J \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \hat{\xi}, \xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_J))\right)\right] + \left[\left(h_J \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \hat{\xi}', \xi'^{-1}(\mathrm{Im}(g_J))\right)\right] \\ &= \left[\left(h_J \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \left(\hat{\xi} \restriction_K\right) + h_J \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \left(\hat{\xi}' \restriction_K\right), K\right)\right] \\ &= \left[\left(h_J \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \left(\hat{\xi} \restriction_K + \hat{\xi}' \restriction_K\right), K\right)\right]. \end{aligned}$$

Ahora, como $\hat{\xi} \restriction_K + \hat{\xi}' \restriction_K : K \longrightarrow \frac{A}{t(A)}$, entonces, $L := \left(\hat{\xi} \restriction_K + \hat{\xi}' \restriction_K\right)^{-1} (\mathrm{Im}(g_J)) \subseteq K$. Entonces

$$\begin{aligned} [(\xi, I)] \bullet [(\eta, J)] + [(\xi', I')] \bullet [(\eta, J)] &= \left[\left(h_J \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \left(\hat{\xi} \restriction_L + \hat{\xi}' \restriction_L\right), L\right)\right] \\ &= \left[\left(\hat{\xi} \restriction_K + \hat{\xi}' \restriction_K\right), K\right] \bullet [(\eta, J)] \\ &= \left([(\hat{\xi}, \xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_J)))] + [(\hat{\xi}', \xi'^{-1}(\mathrm{Im}(g_J)))]\right) \bullet [(\eta, J)] \\ &= ([(\xi, I)] + [(\xi', I')]) \bullet [(\eta, J)]. \end{aligned}$$

Se sigue que $\bullet$ es distributiva por la derecha. Finalmente, veamos que $\bullet$ es distributiva por la izquierda. Sea $P = J \cap J'$, tenemos

$$[(\xi, I)] \bullet ([(\eta, J)] + [(\eta', J')]) = [(\xi, I)] \bullet [(\eta \restriction_P + \eta' \restriction_P, P)].$$

Consideremos $h = h_J \circ \gamma_1 + h_{J'} \circ \gamma_2$ y $g = \delta_J \circ \hat{g}_J \circ \gamma_1$ (ó $g = \delta_{J'} \circ \hat{g}_{J'} \circ \gamma_2$, veremos que son lo mismo), donde los homomorfismos $\gamma_1 : \frac{P}{t(P)} \longrightarrow \frac{J}{t(J)}$ y $\gamma_2 : \frac{P}{t(P)} \longrightarrow \frac{J'}{t(J')}$ están definidos para cada $x + t(P) \in \frac{P}{t(P)}$ como $\gamma_1(x + t(P)) = x + t(J)$ y $\gamma_2(x + t(P)) = x + t(J')$, respectivamente. Es inmediato que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_P"'] \arrow[rr, bend left, "\eta\restriction_P"] & J \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\pi_J"'] & M/t(M) \\ \frac{P}{t(P)} \arrow[r, "\gamma_1"'] & J/t(J) \arrow[ur, "h_\eta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_P"'] \arrow[rr, bend left, "\eta'\restriction_P"] & J \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "\pi_J"'] & M/t(M) \\ \frac{P}{t(P)} \arrow[r, "\gamma_2"'] & J/t(J) \arrow[ur, "h_{\eta'}"'] & \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_P"'] \arrow[rr, hook, bend left, "\iota_P"] & J \arrow[r, hook, "\iota_J"] \arrow[d, "\pi_J"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\ \frac{P}{t(P)} \arrow[r, "\gamma_2"'] & J/t(J) \arrow[urr, tail, "g_J"'] \arrow[rr, tail, two heads, "\hat{g}_J"'] & & \mathrm{Im}(g_J) \arrow[u, "\delta_J"'] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} P \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_P"'] \arrow[rr, hook, bend left, "\iota_P"] & J' \arrow[r, hook, "\iota_{J'}"] \arrow[d, "\pi_{J'}"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\ \frac{P}{t(P)} \arrow[r, "\gamma_2"'] & J'/t(J') \arrow[urr, tail, "g_{J'}"'] \arrow[rr, tail, two heads, "\hat{g}_{J'}"'] & & \mathrm{Im}(g_{J'}) \arrow[u, "\delta_{J'}"'] \end{tikzcd}$$

Así, se sigue que:

- $h \circ \pi_P = (h_J \circ \gamma_1 + h_{J'} \circ \gamma_2) \circ \pi_P = h_J \circ \gamma_1 \circ \pi_P + h_{J'} \circ \gamma_2 \circ \pi_P = \eta \restriction_P + \eta' \restriction_P$.
- Si $g = \delta_J \circ \hat{g}_J \circ \gamma_1$, entonces $g \circ \pi_P = (\delta_J \circ \hat{g}_J \circ \gamma_1) \circ \pi_P = \delta_J \circ \hat{g}_J \circ \gamma_1 \circ \pi_P = \pi_A \circ \iota_P$.
- Si $g = \delta_{J'} \circ \hat{g}_{J'} \circ \gamma_2$, entonces $g \circ \pi_P = (\delta_{J'} \circ \hat{g}_{J'} \circ \gamma_2) \circ \pi_P = \delta_{J'} \circ \hat{g}_{J'} \circ \gamma_2 \circ \pi_P = \pi_A \circ \iota_P$.

Por la unicidad de dichos morfismos tenemos en particular que $g = \delta_J \circ \hat{g}_J \circ \gamma_1 = \delta_{J'} \circ \hat{g}_{J'} \circ \gamma_2$ y además es inyectivo. Así, tomando $\hat{\xi} := \xi \restriction_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g))}$:

$$\begin{aligned}
[(\xi, I)] \bullet ([(\eta, J)] + [(\eta', J')]) &= [(\xi, I)] \bullet [(\eta \restriction_P + \eta' \restriction_P, P)] = \left[\left(h \circ \hat{g}^{-1} \circ \hat{\xi}, \xi^{-1}(\mathrm{Im}(g))\right)\right] \\
&= \left[\left((h_J \circ \gamma_1 + h_{J'} \circ \gamma_2) \circ g^{-1} \circ \hat{\xi}, \xi^{-1}(\mathrm{Im}(g))\right)\right] \\
&= \left[\left(h_J \circ \gamma_1 \circ \hat{g}^{-1} \circ \hat{\xi} + h_{J'} \circ \gamma_2 \circ \hat{g}^{-1} \circ \hat{\xi}, \xi^{-1}(\mathrm{Im}(g))\right)\right] \\
&= \left[\left(h_J \circ \gamma_1 \circ \hat{g}^{-1} \circ \hat{\xi}, \xi^{-1}(\mathrm{Im}(g))\right)\right] + \left[\left(h_{J'} \circ \gamma_2 \circ \hat{g}^{-1} \circ \hat{\xi}, \xi^{-1}(\mathrm{Im}(g))\right)\right] \\
&= [(\xi, I)] \bullet [(\eta \restriction_P, P)] + [(\xi, I)] \bullet [(\eta' \restriction_P, P)] \\
&= [(\xi, I)] \bullet [(\eta, J)] + [(\xi, I)] \bullet [(\eta', J')].
\end{aligned}$$

Se sigue que $\bullet$ es distributiva por la izquierda. Por lo tanto, $\bullet$ es biaditiva

Q.E.D

Proposición 3.3.10. *Sea A un anillo y $M \in A$-**Mod**. Para cada $[(\lambda, I)], [(\xi, J)] \in A_\zeta$ y $[(\eta, K)] \in M_{\mathcal{G}}$, se cumple que:*

$$[(\lambda, I)] \bullet ([(\xi, J)] \bullet [(\eta, K)]) = ([(\lambda, I)] \bullet_A [(\xi, I)]) \bullet [(\eta, K)],$$

donde $\bullet_A$ denota a $\bullet$ cuando $M = A$.

Dem.
Sean $[(\lambda, I)], [(\xi, J)] \in A_\zeta$ y $[(\eta, J)] \in M_{\mathcal{G}}$. Sean $h_\xi : J/t(J) \longrightarrow A/t(A)$, $h_\eta : K/t(K) \longrightarrow M/t(M)$, $g_J : J/t(J) \longrightarrow A/t(A)$ y $g_K : K/t(K) \longrightarrow A/t(A)$ los homomorfismos que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\pi_J"'] & A/t(A) \\
J/t(J) \arrow[ur, "h_\xi"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
J \arrow[r, hook, "\iota_J"] \arrow[d, "\pi_J"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\
J/t(J) \arrow[urr, tail, "g_J"] \arrow[rr, tail, two heads, "\hat{g}_J"'] & & \mathrm{Im}(g_J) \arrow[u, hook, "\delta_J"']
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\pi_K"'] & M/t(M) \\
K/t(K) \arrow[ur, "h_\eta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook, "\iota_K"] \arrow[d, "\pi_K"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\
K/t(K) \arrow[urr, tail, "g_K"] \arrow[rr, tail, two heads, "\hat{g}_K"'] & & \mathrm{Im}(g_K) \arrow[u, hook, "\delta_K"']
\end{tikzcd}$$

Así,

$$\begin{aligned}
[(\lambda, I)] \bullet_A [(\xi, J)] &= \left[\left(h_\xi \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \hat{\lambda}, \lambda^{-1}\left(\mathrm{Im}(g_J)\right)\right)\right], \\
[(\xi, J)] \bullet [(\eta, K)] &= \left[\left(h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \hat{\xi}, \xi^{-1}\left(\mathrm{Im}(g_K)\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

Se sigue:

$$\begin{aligned}
([(\lambda, I)] \bullet_A [(\xi, J)]) \bullet [(\eta, K)] &= \left[\left(h_\xi \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \hat{\lambda}, \lambda^{-1}\left(\mathrm{Im}(g_J)\right)\right)\right] \bullet [(\eta, K)] \\
&= \left[\left(h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \left(\widehat{h_\xi \circ \hat{g}_J^{-1}} \circ \hat{\lambda}\right), \left(h_\xi \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \hat{\lambda}\right)^{-1}\left(\mathrm{Im}(g_K)\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $h_{h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \hat{\xi}} : \xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))/t\left(\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))\right) \longrightarrow M/t(M)$ el homomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K)) \arrow[r, "h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \hat{\xi}"] \arrow[d, "\pi_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))}"'] & M/t(M) \\
\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))/t\left(\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))\right) \arrow[ur, "h_{h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \hat{\xi}}"'] &
\end{tikzcd}$$

y sea $g_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_J))} : \xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))/t\left(\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))\right) \longrightarrow A/t(A)$ el homomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K)) \arrow[r, hook, "\iota_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))}"] \arrow[d, "\pi_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))}"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\
\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))/t(\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))) \arrow[urr, tail, "g_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))}"'] \arrow[rr, tail, two heads, "\hat{g}_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))}"'] & & \mathrm{Im}(g_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))}) \arrow[u, hook, "\delta_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))}"']
\end{tikzcd}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
[(\lambda, I)] \bullet ([(\xi, J)] \bullet [(\eta, K)]) &= [(\lambda, I)] \bullet \left[\left(h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \hat{\xi}, \xi^{-1}\left(\mathrm{Im}(g_K)\right)\right)\right] \\
&= \left[\left(h_{h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \hat{\lambda}} \circ \hat{g}_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))} \circ \hat{\lambda}, \lambda^{-1}\left(\mathrm{Im}(g_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))})\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

Sea $L = \lambda^{-1}\left(\mathrm{Im}(g_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))})\right) \cap \left(h_\xi \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \hat{\lambda}\right)^{-1}(\mathrm{Im}(g_K)) \subseteq I$. Para $x \in L$, se tiene que

$$\lambda(x) \in \mathrm{Im}(g_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))}) = \frac{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K)) + t(A)}{t(A)}.$$

Así, sea $\nu_x \in \xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))$ tal que $\lambda(x) = \nu_x + t(A)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
h_{h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \hat{\xi}} \circ \hat{g}_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))} \circ \hat{\lambda}(x) &= h_{h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \hat{\xi}} \circ \hat{g}_{\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))}(\nu_x + t(A)) \\
&= h_{h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \hat{\xi}}\left(\nu_x + t\left(\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K))\right)\right) = h_{h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \hat{\xi}} \circ \pi_{(\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_K)))}(\nu_x) \\
&= h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \hat{\xi}(\nu_x) = h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \xi(\nu_x)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \left(h_\xi \circ \widehat{\hat{g}_J^{-1}} \circ \hat{\lambda}\right)(x) &= h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ h_\xi \circ \hat{g}_J^{-1}(\nu_x + t(J)) = \\
&= h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ h_\xi \circ \pi_J(\nu_x) = h_\eta \circ \hat{g}_K^{-1} \circ \xi(\nu_x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$([(\lambda, I)] \bullet_A [(\xi, J)]) \bullet [(\eta, K)] = ([(\lambda, I)] \bullet_A [(\xi, J)]) \bullet [(\eta, K)].$$

Q.E.D

Proposición 3.3.11. *$A_{\mathcal{G}}$ es anillo y $M_{\mathcal{G}} \in A_{\mathcal{G}}$-**Mod**.*

Dem.
Sabemos que $A_{\mathcal{G}}$ y $M_{\mathcal{G}}$ tienen estructura de grupo abeliano, que $\bullet$ es biaditiva y que se cumple la asociatividad. Nos resta mostrar la veracidad de lo siguiente:

(*i*) Para todo $[(\eta, J)] \in M_{\mathcal{G}}$, se cumple que $[(\pi_A, A)] \bullet [(\eta, J)]] = [(\eta, J)]$. Para ello, sean $h_\eta : J/t(J) \longrightarrow M/t(M)$ y $g_J : J/t(J) \longrightarrow A/t(A)$ que hacen conmutar los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\pi_J"'] & M/t(M) \\
J/t(J) \arrow[ur, "h_\eta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
J \arrow[r, hook, "\iota_J"] \arrow[d, "\pi_J"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\
J/t(J) \arrow[urr, tail, "g_J"'] \arrow[rr, tail, two heads, "\hat{g}_J"'] & & \mathrm{Im}(g_J) \arrow[u, hook, "\delta_J"']
\end{tikzcd}$$

Así, $[(\pi_A, A)] \bullet [(\eta, J)] = \left[\left(h_\eta \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \hat{\pi}_A, \pi_A^{-1}(\mathrm{Im}(g_J))\right)\right]$. Como $\mathrm{Im}(g_J) = \frac{J+t(A)}{t(A)}$, se sigue que $J \subseteq \hat{\pi}_J^{-1}\left(\frac{J+t(A)}{t(A)}\right)$. De modo que para $x \in J$, tenemos

$$h_\eta \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \hat{\pi}_A(x) = h_\eta \circ \hat{g}_J^{-1}(x + t(A)) = h_J(x + t(J)) = h_J \circ \pi_J(x) = \eta(x).$$

Por lo tanto, $\left[\left(h_\eta \circ \hat{g}_J^{-1} \circ \hat{\pi}_A, \pi_A^{-1}(\mathrm{Im}(g_J))\right)\right] = [(\eta, J)]$, es decir,

$$[(\pi_A, A)] \bullet [(\eta, J)] = [(\eta, J)].$$

Esto prueba lo deseado.

(ii) $[(\pi_A, A)]$ es la identidad en $\left(A_{(\zeta)}, +, \bullet_A\right)$. Para ello, sea $[(\xi, I)] \in A_{\mathcal{G}}$. Por el inciso (ii) se sigue que $[(\pi_A, A)] \bullet [(\xi, I)] = [(\xi, I)]$. Nos resta verificar que $[(\xi, I)] \bullet [(\pi_A, A)] = [(\xi, I)]$, en este caso los homomorfismos $h_{\pi_A} = \mathrm{id}_{\frac{A}{t(A)}}$ y $g_A = \mathrm{id}_{\frac{A}{t(A)}}$ son los que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\pi_A"'] & A/t(A) \\
A/t(A) \arrow[ur, "h_{\pi_A}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "\iota_A"] \arrow[d, "\pi_A"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\
A/t(A) \arrow[urr, tail, "g_A"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ahora, como $\xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_J)) = \xi^{-1}\left(\frac{A}{t(A)}\right) = I$ se sigue que

$$[(\xi, I)] \bullet [(\pi_A, A)] = \left[\left(\mathrm{id}_{\frac{A}{t(A)}} \circ \mathrm{id}_{\frac{A}{t(A)}} \circ \xi, I\right)\right] = [(\xi, I)].$$

Por lo tanto, $[(\pi_A, A)]$ es la identidad en $\left(A_{(\zeta)}, +, \bullet_A\right)$.

De (i), (ii) y (iii) se concluye lo deseado, es decir, cuando $M = A$ tenemos que $A_{\mathcal{G}}$ es un anillo y por lo tanto para cualquier $M \in A$-**Mod**, $M_{\mathcal{G}} \in A_{\mathcal{G}}$-**Mod**.

Q.E.D

Ahora, consideremos la siguiente asignación: sea $q : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A_{\mathcal{G}}\text{-}\mathbf{Mod}$ dada por

- Para cada M, A-módulo, $\quad q(M) = M_{\mathcal{G}}$.
- Para cada A-homomorfismo $f : M \longrightarrow N$, tenemos que $q(f) = f_{\mathcal{G}} \in \mathrm{Hom}\left(M_{\mathcal{G}}, N_{\mathcal{G}}\right)$, y este último se define como

$$f_{\mathcal{G}}\left([(\xi, I)]\right) = [(h_f \circ \xi, I)], \text{ para cada } [(\xi, I)] \in M_{\mathcal{G}},$$

donde, $h_f : \frac{M}{t(M)} \longrightarrow \frac{N}{t(N)}$ es un morfismo tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_M"'] & N \arrow[r, "\pi_N"] & \frac{N}{t(N)} \\
\frac{M}{t(M)} \arrow[urr, "h_f"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ahora, para cada A-homomorfismo $f : M \longrightarrow N$, veamos que $f_{\mathcal{G}}$ está bien definido. Primero, observemos que dado que $t \in A$-pr, se tiene que $f(t(M)) \leq t(N)$, así $\mathrm{Nu}(\pi_M) = t(M) \subseteq \mathrm{Nu}(\pi_N \circ f) = f^{-1}(t(N))$, y en virtud del Teorema de Factor tenemos la existencia única de h_f. Supongamos que $[(\xi, I)] = [(\xi', I')]$, entonces existen $K \in \mathcal{G}$ con $I, I' \leq K$ tal que $\xi \restriction_K = \xi' \restriction_K$. Así, $h_f \circ \left(\xi \restriction_K\right) = h_f \circ \left(\xi' \restriction_K\right)$, se sigue que $\left(h_f \circ \xi\right) \restriction_K = \left(h_f \circ \xi'\right) \restriction_K$. Por lo tanto, $f_{\mathcal{G}}$ está bien definida.

Proposición 3.3.12. *q es un funtor covariante.*

Dem.
(1) Por definición, para cada $M \in A$-**Mod**, $q(M) \in A_{\mathcal{G}}$-**Mod**.

(2) Sean $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow K$ A-lineales. Para cada $[(\xi, I)] \in M_{\mathcal{G}}$, tenemos que:

- Los cuadrados del siguiente diagrama conmuta, al igual que el exterior del diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_M"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_N"'] & K \arrow[d, "\pi_K"'] \\ \frac{M}{t(M)} \arrow[r, "h_f"] \arrow[rr, bend right, "h_{g\circ f}"'] & \frac{N}{t(N)} \arrow[r, "h_g"] & \frac{K}{t(K)} \end{tikzcd}$$

  Por la unicidad, se sigue que $h_{g\circ f} = h_g \circ h_f$, así, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} q(g\circ f)([(\xi, I)]) &= [((h_{g\circ f})\circ \xi, I)] = [((h_g \circ h_f)\circ \xi, I)] = [h_g \circ (h_f \circ \xi), I] \\ &= q(g)\left([(h_f \circ \xi, I)]\right) = q(g)\circ q(f)([(\xi, I)]). \end{aligned}$$

  Por lo tanto, $\quad F(g\circ f) = F(g)\circ F(f)$.

- Para $f = \mathrm{id}_M$. Claramente $\pi_M \circ \mathrm{id}_M = \pi_M \circ \mathrm{id}_{\frac{M}{t(M)}}$, es decir el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\pi_M"'] & M \arrow[r, "\pi_M"] & \frac{M}{t(M)} \\ \frac{M}{t(M)} \arrow[urr, "\mathrm{id}_{\frac{M}{t(M)}}"'] & & \end{tikzcd}$$

  Así, $q\left(\mathrm{id}_M\right)([(\xi, I)]) = \left[\left(\mathrm{id}_{\frac{M}{t(M)}} \circ \xi, I\right)\right] = [(\xi, I)]$. Por lo tanto, $q\left(\mathrm{id}_M\right) = \mathrm{id}_{M_{\mathcal{G}}}$.

De (1), (2) se sigue que F es un funtor covariante.

Q.E.D

Para cada $m \in M$, consideremos la función $\xi_m : A \longrightarrow \frac{M}{t(M)}$ dada por $\xi_m(a) = am + t(M)$, para todo $a \in A$. El siguiente lema muestra que para cada $m \in M$ ξ_m es un A-homomorfismo.

Lema 3.3.13. *Para cada $m \in M$, ξ_m es A-homomorfismo. Además, para $m, m' \in M$ se tiene que $\xi_{m+m'} = \xi_m + \xi_{m'}$.*

Dem.
Sea $m \in M$ y $r, a, b \in A$. Entonces

$$\begin{aligned} \xi_m(a + rb) &= (a + rb)m + t(M) = am + r(bm) + t(M) \\ &= (am + t(M)) + r\left(bm + t(M)\right) = \xi_m(a) + r\xi_m(b). \end{aligned}$$

Por lo tanto, ξ_m es A-homomorfismo. Finalmente,

$$\begin{aligned} \xi_{m+m'}(a) &= a(m + m') + t(M) = am + am' + t(M) = (am + t(M)) + (am' + t(M)) \\ &= \xi_m(a) + \xi_{m'}(a). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\xi_{m+m'} = \xi_m + \xi_{m'}$.

Q.E.D

Ahora, consideremos la función $\Psi_M : M \longrightarrow M_{\mathcal{G}}$ dada por $\Psi_M(m) = [(\xi_m, I)]$ para cada $m \in M$.

Proposición 3.3.14. *Ψ_M es $\mathbb{Z}$-homomorfismo y si $M = A$, entonces Ψ_A es homomorfismo de anillos.*

Dem.
Sean $m, m' \in M$, Entonces,

$$\begin{aligned}\Psi_M(m+m') &= [(\xi_{m+m'}, A)] = [(\xi_m + \xi_{m'}, A)] = [(\xi_m, A)] + [(\xi_{m'}, A)] \\ &= \Psi_M(m) + \Psi_M(m').\end{aligned}$$

Por lo tanto, Ψ_M es homomorfismo de grupos abelianos. Ahora, supongamos que $M = A$, tenemos lo siguiente:

- Por definición $\Psi_A(1) = [(\xi_1, A)] = [(\pi_A, A)]$, este último es la identidad en $A_{\mathcal{G}}$.
- Por definición $\Psi_A(ab) = [(\xi_{ab}, A)]$. Por otro lado tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\xi_b"] \arrow[d, "\pi_A"'] & \frac{A}{t(A)} \\ \frac{A}{t(A)} \arrow[ur, "h_{\xi_b}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota_A"] \arrow[d, "\pi_A"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & \frac{A}{t(A)} \\ \frac{A}{t(A)} \arrow[urr, "g_A = \mathrm{id}_{\frac{A}{t(A)}}"'] & & \end{tikzcd}$$

Por definición del producto en $A_{\mathcal{G}}$, se sigue inmediatamente que

$$[(\xi_a, A)] \bullet [(\xi_b, A)] = [(h_{\xi_b} \circ \xi_a, A)], \qquad \text{pues, } g = \mathrm{id}_{A/t(A)}.$$

Ahora, para todo $x \in A$, tenemos

$$h_{\xi_b} \circ \xi_a(x) = h_{\xi_b}(ax + t(A)) = (xa)b + t(A) = x(ab) + t(A) = \xi_{ab}(x).$$

Se sigue que, $[(h_{\xi_b} \circ \xi_a, A)] = [(\xi_{ab}, A)]$, es decir, $[(\xi_a, A)] \bullet (\xi_b, A)] = [(\xi_{ab}, A)]$.

En consecuencia, $\Psi_A(ab) = \Psi_A(a)\Psi_A(b)$. Por lo tanto, Ψ_A es un homomorfismo de anillos.

Q.E.D

Del resultado anterior, se sigue que a $M_{\mathcal{G}}$ le podemos dar estructura de A-módulo, cuyo producto está dado por $a \cdot x = \Psi_A(a) \bullet x$ para cada $a \in A$ y $x \in M_{\mathcal{G}}$.

Lema 3.3.15. $\mathrm{Nu}(\Psi_M) = t(M)$.

Dem.
Tenemos $\mathrm{Nu}(\Psi_M) = \{m \in M |\ \text{existe}\ K \in \mathcal{G}\ \text{tal que}\ Km \subseteq t(M)\}$.

($\supseteq$) Para cada $m \in t(M)$, $Am \subseteq t(M)$, por lo que $m \in \mathrm{Nu}(\Psi_M)$. Por lo tanto, $t(M) \subseteq \mathrm{Nu}(\Psi_M)$.

($\subseteq$) Sí $m \in \mathrm{Nu}(\Psi_M)$, existe $K_m \in \mathcal{G}$ tal que $K_m m \subseteq t(M)$. Tomemos $x \in K$, entonces $xm \in t(M)$, existen $N_1, \ldots, N_l \in \mathbb{T}_{\mathcal{G}}$ tales que $am = m_1 + \ldots m_l$, donde $m_i \in \mathrm{Im}(f_i : N_i \longrightarrow M)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, esto es por definición de $\mathbb{T}_{\mathcal{G}}$. Se sigue que para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$ tenemos que $\mathrm{ann}(m_i)$, así $\bigcap_{i=1}^{l} \mathrm{ann}(m_i) \in \mathbb{T}_{\mathcal{G}}$, pues $\mathcal{G}$ es filtro de Gabriel. Para cada $a \in \bigcap_{i=1}^{l} \mathrm{ann}(m_i)$, $0 = a(xm) = (ax)m$, implica que $ax \in \mathrm{ann}(m)$, por lo que $a \in (\mathrm{ann}(m) : x)$. En consecuencia,

$$\bigcap_{i=1}^{l} \mathrm{ann}(m_i) \subseteq (\mathrm{ann}(m) : x) \qquad \Rightarrow \qquad (\mathrm{ann}(m) : x) \in \mathcal{G}$$

Dado que esto se puede hacer para cada $x \in K$, se sigue que para todo $x \in K$, $(\mathrm{ann}(m) : x) \in \mathcal{G}$, y dado que $\mathcal{G}$ es filtro de Gabriel, $\mathrm{ann}(m) \in \mathcal{G}$. Así, $\mathrm{Nu}(\Psi_M) \in \mathbb{T}_{\mathcal{G}}$, entonces $\mathrm{Nu}(\Psi_M) \subseteq t(M)$. Por lo tanto, $\mathrm{Nu}(\Psi_M) = t(M)$.

Q.E.D

Lema 3.3.16. $\mathrm{Conu}(\Psi_M) \in \mathbb{T}_t = \mathbb{T}_{\mathcal{G}}$.

Dem.
Sea $[(f,I)]+\mathrm{Im}(\Psi_M)\in \mathrm{Conu}(\Psi_M)$. Veamos que $\mathrm{ann}\,([(f,I)]+\mathrm{Im}(\Psi_M)\in\mathcal{G}$. Con esta finalidad, sea $a\in I$, y $b\in(\mathrm{ann}\,([(f,I)]+\mathrm{Im}(\Psi_M):a)$, tenemos;

$$ba\in \mathrm{ann}\,([(f,I)]+\mathrm{Im}(\Psi_M) \qquad\Rightarrow\qquad (ab)\cdot[(f,I)]\in\mathrm{Im}(\psi_M).$$

Sea $x\in I$, veamos quién es $(xa)\cdot[(f,I)]$ explícitamente. Recordemos que tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_I"'] & \frac{M}{t(M)} \\ \frac{I}{t(I)} \arrow[ur, "h_f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "\iota_I"] \arrow[d, "\pi_I"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & \frac{A}{t(A)} \\ \frac{I}{t(I)} \arrow[urr, "g_I"'] & & \end{tikzcd}$$

Por lo que $(xa)\cdot[(f,I)]=[(h_f\circ g_I\circ\xi_{xa},J)]$, donde $J=\xi_{xa}^{-1}\left(\frac{I+t(A)}{t(A)}\right)$. Ahora, sea $r\in J$, tenemos;

$$\begin{aligned} h_f\circ g_I^{-1}\xi_{xa}(r) &= h_f\circ g_I^{-1}(r(xa)+t(A))=h_f(r(xa)+t(I))=h_f\circ\pi_I(r(xa)) \\ &= f(r(xa))=rf(xa). \end{aligned}$$

Supongamos que $f(xa)=m_{xa}+t(M)$, entonces $h_f\circ g_I^{-1}\circ\xi_{xa}(r)=rm_{xa}+t(M)=\xi_{m_{xa}}(r)$. Por lo tanto, $h_f\circ g_I^{-1}\circ\xi_{xa}=\xi_{m_{xa}}$. Se sigue que $(xa)\cdot[(f,I)]\in\mathrm{Im}(\Psi_M)$, esto implica que $x\in(\mathrm{ann}\,([(f,I)]+\mathrm{Im}(\Psi_M):a)$, por lo que $I\subseteq(\mathrm{ann}([(f,I)]+\mathrm{Im}(\Psi_M)):a)$, así

$$(\mathrm{ann}([(f,I)]+\mathrm{Im}(\Psi_M)):a)\in\mathcal{G}.$$

En consecuencia, $\mathrm{ann}([(f,I)]+\mathrm{Im}(\Psi_M))\in\mathcal{G}$, y por lo tanto $\mathrm{Conu}(\Psi_M)\in\mathbb{T}_t$.

Q.E.D

Sea $\chi:\mathrm{id}\longrightarrow q$, dada para cada $M\in A$-**Mod**, $\chi_A=\Psi_M$. Afirmamos que χ es una transformación natural. Sea $f:M\longrightarrow N$ en A-**Mod**. Entonces, para cada $m\in M$, tenemos:

- $\Psi_N\circ f(m)=\Psi_N(f(m))=[(\xi_{f(m)},A)]$.
- $f_{\mathcal{G}}\circ\Psi_M(m)=f_{\mathcal{G}}([(\xi_m,A)])$, en este caso recordemos que debemos considerar el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_M"'] & N \arrow[r, "\pi_N"] & \frac{N}{t(N)} \\ \frac{M}{t(M)} \arrow[urr, "h_f"'] & & \end{tikzcd}$$

Así, $f_{\mathcal{G}}\circ\Psi_M(m)=[(h_f\circ\xi_m,A)]$. Por otro lado, para cada $a\in A$,

$$\begin{aligned} h_f\circ\xi_m(a) &= h_f(am+t(M))=h_m\circ\pi_M(am)=\pi_N\circ f(am) \\ &= f(am)+t(N)=af(m)+t(M)=\xi_{f(m)}(a). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_{\mathcal{G}}\circ\Psi_M(m)=[(\xi_{f(m)},A)]=\Psi_M(f(m))=\Psi_N(f(m))=\Psi_N\circ f(m)$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi_M"'] & N \arrow[d, "\Psi_N"] \\ M_{\mathcal{G}} \arrow[r, "f_{\mathcal{G}}"'] & N_{\mathcal{G}} \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, χ es una transformación natural.

Definición 3.3.17. *t es estable, si $\mathbb{T}_t$ es cerrado bajo cápsulas inyectivas.*

Proposición 3.3.18. *Cuando la teoría de torsión es estable, tenemos que $M_{\mathcal{G}} = M_{(\mathcal{G})}$.*

Definición 3.3.19. *Un A-módulo M es $\mathcal{G}$-cerrado (respectivamente $\mathcal{G}$-inyectivo) si para cada $I \in \mathcal{G}$ el homomorfismo canónico $\Phi_I : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(I, M)$ dado por $\Phi_I(m) = f_m \restriction_I$, es isomorfismo (respectivamente epimorfismo)*

Proposición 3.3.20. *M es $\mathcal{G}$-cerrado, si y solo si $M \in \mathbb{T}_t$ y M es $\mathcal{G}$-inyectivo.*

Dem.
Supongamos que M es $\mathcal{G}$-cerrado. En particular es $\mathcal{G}$-inyectivo. Veamos que $M \in \mathbb{F}_t$. Sea $m \in t(M)$, como $t(M) = \mathrm{Nu}(\varphi_M)$, entonces existe $K \in \mathcal{G}$ tal que $f_m \restriction_K = 0$, es decir, $Km = 0$. Como Φ_K es biyectivo, se sigue que $f_m = 0$, en consecuencia $m = 0$. $t(M) = \mathrm{Nu}(\varphi_M) = 0$. Por lo tanto, $M \in \mathbb{F}_t$. Ahora, supongamos que $M \in \mathbb{F}_t$ y M es $\mathcal{G}$-inyectivo. Es decir, $0 = t(M) = \mathrm{Nu}(\varphi_M)$, y para cada $I \in \mathcal{G}$, $\Phi_I : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(I, M)$. Sea $m \in \mathrm{Nu}\,(\Psi_I)$, entonces $\Phi_I(m) = f_m \restriction_I$, implica que $[(f_m, A)] = [(0, A)]$, se sigue que $m \in \mathrm{Nu}(\varphi_M)$ y por hipótesis $m = 0$. Por lo tanto, Φ_I es inyectiva. Así, Φ_I es biyectiva, y por lo tanto M es $\mathcal{G}$-cerrado.

Q.E.D

Corolario 3.3.21. *Si M es $\mathcal{G}$-cerrado, entonces Ψ_M es isomorfismo.*

Dem.
Dado que M es $\mathcal{G}$-cerrado, en particular $M \in \mathcal{F}_t$, es decir $0 = t(M) = \mathrm{Nu}\,(\Psi_M)$. Por lo tanto, Ψ_M es inyectiva. Además $M/t(M) \cong M$, pues $t(M) = 0$, y obviamente $\delta : M/t(M) \longrightarrow M$ dada por $\delta(m + \{0\}) = m$ es isomorfismo. Sea $[(f, I)] \in M_{\mathcal{G}}$ $(f : I \longrightarrow M/t(M))$. Tenemos que $\delta \circ f : I \longrightarrow M$, y como M es $\mathcal{G}$-cerrado, en particular Φ_I es sobre, se sigue que existe $m \in M$ tal que $\delta \circ f = \Phi_I(m) = f_m \restriction_I$, se sigue que $f = \delta^{-1} \circ f_m \restriction_I = \xi_m \restriction_I$. $\Psi_M(m) = [(\xi_m, A)] = [(\xi_m, I)] = [(f, I)]$, es decir, Ψ_M es sobre. Así, Ψ_M es biyectiva. Por lo tanto, Ψ_M es isomorfismo.

Q.E.D

Lema 3.3.22. *Si $M \in \mathcal{F}_t$, entonces $M_{(\mathcal{G})} \in \mathbb{F}_t$.*

Dem.
Supongamos que $M \in \mathcal{G}$. Sea $x \in M_{\mathcal{G}}$ y $\xi : I \longrightarrow M$ representante de x. Sabemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\xi"'] & A \arrow[d, "\beta_x(a)=a\cdot x"] \\ M \arrow[r, "\varphi_M"'] & M_{(\mathcal{G})} \end{tikzcd}$$

Así que $\varphi_M \circ \xi = \beta_x \circ i$. Consideremos a $x \in \mathrm{Nu}\left(\varphi_{M_{(\mathcal{G})}}\right)$, entonces existe $K \in \mathcal{G}$ tal que $Kx = 0$, en otras palabras $\beta_x \restriction_K = 0$. Se sigue que $\varphi_M \circ \xi \restriction_{K \cap I} = 0$, esto implica que $\xi \restriction_{K \cap I} = 0$, pues por hipótesis $\mathrm{Nu}(\varphi_M) = t(M) = 0$, es decir φ_M es inyectiva. En consecuencia, $x = [(\xi, I)] = [(0, A)]$, es decir, $0 = \mathrm{Nu}\left(\varphi_{M_{(\mathcal{G})}}\right) = t\left(M_{(\mathcal{G})}\right)$. Por lo tanto, $M_{(\mathcal{G})} \in \mathbb{F}_t$.

Q.E.D

Lema 3.3.23. *Sea $J \subseteq I$ en $\mathcal{G}$ y $M \in \mathbb{F}_t$. Supongamos que $f, g : I \longrightarrow M$ son A-homomorfismos tales que $f \restriction_J = g \restriction_J$, entonces $f = g$.*

Dem.
Tenemos $(f-g)\restriction_J = 0$, se sigue que $J \subseteq \mathrm{Nu}(f-g)$. Así, por el teorema del factor, existe $h : I/J \longrightarrow M$ homomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f-g"] \arrow[d, "P_I"'] & M \\ I/J \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

donde P_I es la proyección natural. Ahora, como $J \in \mathcal{G}$, entonces para todo $a \in A$, $(J : a) \in \mathcal{G}$, en particular cuando $a \in I$, así para todo $a \in I$, $\mathrm{ann}(a+J) \in \mathcal{G}$. Es decir, $I/J \in \mathbb{T}_t$. Así, $h\,(t(I/J)) = h\,(I/J) \leq t(M) = 0$, implica $h = 0$. Por lo tanto, $f - g = 0$, es decir, $f = g$.

Q.E.D

Proposición 3.3.24. *$M_{\mathcal{G}}$ es un $\mathcal{G}$-cerrado, para cada A-módulo M.*

Dem.
Sea $M \in A$-**Mod**. Recordemos que $M_{\mathcal{G}} \cong (M/t(M))_{(\mathcal{G})}$ y $M/t(M) \in \mathbb{F}_t$. Por lo tanto, $(M/t(M))_{(\mathcal{G})} \in \mathbb{F}_t$, entonces $M_{\mathcal{G}} \in \mathbb{F}_t$. Ahora, veamos que $M_{\mathcal{G}}$ es $\mathcal{G}$-inyectivo. Con este fin, sea $I \in \mathcal{G}$ arbitrario pero fijo, y sea $f : I \longrightarrow M_{\mathcal{G}}$. Consideremos $\frac{M}{t(M)} \times I$ que sabemos es un A-módulo y sea

$$N = \left\{ (m + t(M), r) \in \frac{M}{t(M)} \times I : \varphi_{M/t(M)}(m + t(M)) = f(r) \right\}$$

Veamos que N es subgrupo de $\frac{M}{t(M)} \times I$. Con este fin, sea $(m + t(M), r), (m' + t(M), r') \in N$, tenemos:

$$\varphi_{M/t(M)}(m + t(M)) = f(r), \qquad \varphi_{M/t(M)}(m' + t(M)) = f(r').$$

Se sigue que,

$$\begin{aligned} f(r - r') = f(r) - f(r') &= \varphi_{M/t(M)}(m + t(M)) - \varphi_{M/t(M)}(m + t(M)) \\ &= \varphi_{M/t(M)}\big((m + t(M)) + (m' + t(M))\big). \end{aligned}$$

Así $\big(m + t(M), r\big) - \big(m' + t(M), r'\big) \in N$. Por tanto, N es subgrupo de $M/t(M) \times I$. Sea $\delta_1 = \pi_1 \restriction_N$, y $\delta_2 = \pi_2 \restriction_N$, donde

$$\pi_1 : M/t(M) \times I \longrightarrow M/t(M) \quad \text{y} \quad \pi_2 : M/t(M) \times I \longrightarrow I$$

Así, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\delta_1"'] & I \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & \frac{I}{\delta_2(N)} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \frac{M}{t(M)} \arrow[r, "\varphi_{\frac{M}{t(M)}}"'] & \left(\frac{M}{t(M)}\right)_{(\mathcal{G})} \arrow[r, "P"'] & \mathrm{Conu}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde, P es la proyección canónica. Veamos que el cuadrado conmuta y que δ_2 es inyectiva. Sea $(x, y) = (m + t(M), r) \in \mathrm{Nu}(\delta_2)$, entonces $\delta_2(x, y) = \delta_2(m + t(M), r) = r = 0$, así

$$0 = f(r) = \varphi_{\frac{M}{t(M)}}(m + t(M)) \quad \text{implica} \quad m + t(M) = t(M),$$

pues, $\frac{M}{t(M)} \in \mathcal{F}_t$, por lo que $\mathrm{Nu}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right) = 0$, es decir, $\varphi_{\frac{M}{t(M)}}$ es inyectiva. Por lo tanto, $\mathrm{Nu}(\delta_2) = 0$, esto es δ_2 inyectiva.

Ahora, sea $(m + t(M), r) \in N$, entonces $f(r) = \varphi_{\frac{M}{t(M)}}(m + t(M))$, se sigue que

$$f \circ \delta_2(m + t(M), r) = \varphi_{\frac{M}{t(M)}} \circ \delta_1(m + t(M), r).$$

Por lo tanto, el cuadrado conmuta. Más aún, $\mathrm{Nu}(\pi) = \delta_2(N)$ y $\mathrm{Nu}(P \circ f) = f^{-1}\left(P^{-1}(\mathrm{Im}(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}))\right) = f^{-1}\left(\mathrm{Im}(\varphi_{\frac{M}{t(M)}})\right)$, y como $f \circ \delta_2 = \varphi_{\frac{M}{t(M)}} \circ \delta_1$, se sigue que $f(\delta_2(N)) \leq \mathrm{Im}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)$. Así, $\delta_2(N) \leq f^{-1}\left(\mathrm{Im}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)\right)$. Por el teorema del factor existe $h : \frac{I}{\delta_2(N)} \longrightarrow \mathrm{Conu}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)$ tal que $h \circ \pi = P \circ f$, sabemos que π es epimorfismo.

Observación 3.3.25. *h es inyectivo. Sea $a+\delta_2(N) \in \mathrm{Nu}(h)$, entonces $h \circ \pi(a) = \mathrm{Im}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)$, esto implica que $P \circ f(a) = \mathrm{Im}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)$, implica que $f(a) + \mathrm{Im}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right) = \mathrm{Im}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)$. Así, $f(a) \in \mathrm{Im}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)$, lo cual implica existe un único $m+t(M) \in \frac{M}{t(M)}$ tal que $\varphi_{\frac{M}{t(M)}}(m+t(M)) = f(a)$, se sigue que $(m+t(M), a) \in N$, entonces $\delta_2(m+t(M), a) = a \in \mathrm{Im}(\delta_2)$, implica $a + \delta_2(N) = \delta_2(N)$. Por lo tanto, h es inyectivo.*

Por lo que, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\delta_1"'] & I \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & \frac{I}{\delta_2(N)} \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{M}{t(M)} \arrow[r, "\varphi_{\frac{M}{t(M)}}"'] & \left(\frac{M}{t(M)}\right)_{(\mathcal{G})} \arrow[r, "P"'] & \mathrm{Conu}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por lo visto antes, sabemos que $\mathrm{Conu}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right) \in \mathbb{T}_t$ y por ser t exacto izquierdo, se sigue que $\frac{I}{\delta_2(N)} \in \mathbb{T}_t$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \text{ para cada } \quad a + \delta_2(N) \in \frac{I}{\delta_2(N)}, \quad \mathrm{ann}(a + \delta_2(N)) \in \mathcal{G}. \\
&\Rightarrow (\delta_2(N) : a) \in \mathcal{G}, \quad \text{para cada } \; a \in I \\
&\Rightarrow J = \delta_2(N) \in \mathcal{G}
\end{aligned}$$

Sea $x = \left[(\delta_1 \circ \delta_2^{-1}, I)\right] \in \left(\frac{M}{t(M)}\right)_{(\mathcal{G})}$, un lema visto anteriormente nos dice que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, hook] \arrow[d, "\delta_1 \circ \delta_2^{-1}"'] & A \arrow[d, "\beta_x"] \\
\frac{M}{t(M)} \arrow[r, "\varphi_{\frac{M}{t(M)}}"'] & \left(\frac{M}{t(M)}\right)_{(\mathcal{G})}
\end{tikzcd}$$

Por la conmutatividad del diagrama, se sigue que $\beta_x \restriction_J = \varphi_{\frac{M}{t(M)}} \circ \delta_1 \circ \delta_2^{-1} = f \restriction_J$, y así por un lema antes probado se sigue que $\beta_x = f$ en I. Recordemos que $\beta_x(a) = a \cdot x = \varphi_{\frac{A}{t(A)}} \bullet [(\delta_1 \circ \delta_2^{-1}, I)]$. Con esto hemos probado que $\Phi_I(x) = f$, es decir, hemos probado que Φ_I es sobreyectiva, esto implica que $M_{\mathcal{G}}$ es $\mathcal{G}$-inyectiva. $M_{\mathcal{G}}$ es $\mathcal{G}$-cerrado.

Q.E.D

Sea $\mathcal{A} = (Obj(\mathcal{A}), Mor(\mathcal{A}))$ la subcategoría plena A-**Mod**, donde $Obj(\mathcal{A}) = \{M_{\mathcal{G}} : M \in A\text{-}\mathbf{Mod}\} \subseteq A_{\mathcal{G}}$-**Mod**. Y sea $(A, \mathcal{G})$-**Mod** $= (Obj\,(A, \mathcal{G}), Mor\,(A, \mathcal{G}))$ la subcategoría plena de A-**Mod** donde; $Obj\,(A, \mathcal{G}) = \{M \in A\text{-}\mathbf{Mod} : M \text{ es } \mathcal{G}\text{-cerrado}\}$.

Corolario 3.3.26. *$\mathcal{G}$ y $(A, \mathcal{G})$ - **Mod** son equivalentes.*

Dem.
Consideremos el siguiente par $\langle L, R\rangle : \mathcal{A} \rightleftarrows (A, \mathcal{G})$-**Mod**, donde F está definida como sigue:

- Para cada $M_{\mathcal{G}} \in \mathcal{A}$, $L(M_{\mathcal{G}}) = M_{\mathcal{G}}$, visto como A-**Mod**.
- Para cada $f : M_{\mathcal{G}} \longrightarrow N_{\mathcal{G}}$, $L(f) = f$ visto como A-homomorfirmo

Claramente L es un funtor. R está definida como sigue:

- Para cada $M \in Obj\,(A, \mathcal{G})$, $R\,(M) = M_{\mathcal{G}}$.
- Para cada $g : M \longrightarrow N$ en $Mor(A, \mathcal{G})$, $R(g) = g_{\mathcal{G}}$ visto como A-homomorfirmo

También R es funtor. Ahora, para cada $M \in Obj(A, \mathcal{G})$, $LR(M) = L(M_{\mathcal{G}}) = M_{\mathcal{G}}$. $\xi_M := \mathrm{id}_{M_{\mathcal{G}}}$ es isomorfismo. Esto implica que $\xi : LR \longrightarrow \mathrm{id}_{(A,\mathcal{G})\text{-}\mathbf{Mod}}$ es un isomorfismo natural. También, para cada $M_{\mathcal{G}} \in Obj(\mathcal{A})$, $LR(M_{\mathcal{G}}) = L(M_{\mathcal{G}}) = (M_{\mathcal{G}})_{\mathcal{G}} \cong_{\Psi^{-1}_{M_{\mathcal{G}}}} M_{\mathcal{G}}$, (pues para cada $M \in A\text{-}\mathbf{Mod}$, $M_{\mathcal{G}}$ es $\mathcal{G}$-cerrado), por tanto, $\eta_{M_{\mathcal{G}}} := \Psi_{M_{\mathcal{G}}}$ es isomorfismo. Veamos que $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \longrightarrow RL$ es isomorfismo natural. Anteriormente, para cada $f : M_{\mathcal{G}} \longrightarrow N_{\mathcal{G}}$ ya habíamos probado la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M_{\mathcal{G}} \arrow[r, "\Psi_{M_{\mathcal{G}}}"] \arrow[d, "f"'] & RL(M_{\mathcal{G}}) \arrow[d, "f_{\mathcal{G}}"] \\
N_{\mathcal{G}} \arrow[r, "\Psi_{N_{\mathcal{G}}}"'] & RL\,(N_{\mathcal{G}}) = (N_{\mathcal{G}})_{(\mathcal{G})}
\end{tikzcd}$$

Esto prueba lo deseado.

Q.E.D

En la práctica usualmente no se hace distinción entre las categorías $\mathcal{A}$ y $(A, \mathcal{G})\text{-}\mathbf{Mod}$. Es importante notar que con esta convención, cada A-homomorfismo entre módulos $\mathcal{G}$-cerrados se convierten automáticamente en un $A_{\mathcal{G}}$-homomorfismo. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A\text{ - }\mathbf{Mod} \arrow[rr, shift left=3, "q"] \arrow[rr, shift right=3, "\Psi^*"'] \arrow[dr, shift left, "a"] & & A_{\mathcal{G}}\text{ - }\mathbf{Mod} \arrow[ll, "\Psi_*"'] \\
& (A, \mathcal{G})\text{ - }\mathbf{Mod} \arrow[ul, shift left, "i"] \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\Psi_*(M) = \mathrm{Hom}_{A_{\mathcal{G}}}(A_{\mathcal{G}}, M) \cong M$, es el funtor olvidadizo, y Ψ^* es el funtor $A_{\mathcal{G}} \otimes_A -$. q es el funtor antes descrito, i es el funtor inclusión, a es el funtor L y $j = R$, de la demostración previa. En otras palabras $ia(M) = M_{\mathcal{G}} = \Psi_* q(M) = \Psi_*\,(M_{\mathcal{G}}) = M_{\mathcal{G}} \in A\text{-}\mathbf{Mod}$. Recuérdese que q es exacto izquierdo. También notemos que hay una transformación natural $\Theta : \Psi^* \longrightarrow q$ con $\Theta_M : A_{\mathcal{G}} \otimes M \longrightarrow M_{\mathcal{G}}$ dadas por $\Theta_M(x \otimes m) = x\Psi_M(m)$.

Capítulo 4

Módulos de cocientes sobre filtros de continuidad

Una vez explorado la categoría de módulos cocientes sobre filtros de Gabriel, uno se plantea la siguiente; ¿Se puede generalizar más la categoría de módulos cocientes? La respuesta es satisfactoria. Sin embargo, para ello se requiere de un estudio previo a una nueva familia de objetos que hemos llamado filtros de continuidad. Este capítulo es fundamental y representa el fruto de la investigación llevada a cabo a lo largo de todo el doctorado, por lo que su contenido es completamente original, además de que abre una nueva linea de investigación en el rubro correspondiente.

Al igual que en los capítulos previos, en este seguiremos trabajando en anillo con unidad.

4.1. Filtros de continuidad

Definición 4.1.1. *Sea $\zeta \subseteq \mathcal{I}(A)$. Diremos que ζ es* ***filtro de continuidad*** *en A si cumple:*

(1) $A \in \zeta$.

(2) *Si $I, J \in \zeta$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(I, A)$, entonces $f^{-1}(J) \in \zeta$.*

Las siguientes dos propiedades las cuales se satisfacen en filtros lineales también se satisfacen en filtros de continuidad.

Teorema 4.1.2. *Sea ζ un filtro de continuidad en A. Si $I, J \in \zeta$, entonces*

(i) $I \cap J \in \zeta$.

(ii) *Para cada $a \in A$, $(I : a) \in \zeta$.*

Dem.
Sea $I, J \in \zeta$.

(i) Consideremos la inclusión $I \overset{\iota}{\hookrightarrow} A$. Sabemos que $\iota \in \mathrm{Hom}_A(I, A)$, así $I \cap J = \iota^{-1}(J) \in \zeta$.

(ii) Sea $a \in A$ y consideremos el A-homomorfismo $f_a : A \longrightarrow A$ dado por $f_a(b) = ba$, entonces $f_a^{-1}(I) \in \zeta$.

Ahora,

$$b \in f_a^{-1}(I) \quad \Leftrightarrow \quad ba \in I \quad \Leftrightarrow \quad b \in (I : a)$$

Por tanto, $(I : a) \in \zeta$.

Q.E.D

Notemos que un filtro de continuidad es casi un filtro lineal, pero ciertamente no hay relación de implicación entre ellos, como los siguientes ejemplos lo muestran. El primer ejemplo muestra que un filtro de continuidad no tiene por que ser un filtro de Gabriel.

■ **Ejemplo 4.1.3.** *Consideremos* $A = \mathbb{Z}_{12} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\right\}$ *y* $\zeta_1 = \left\{\left\langle\overline{1}\right\rangle, \left\langle\overline{2}\right\rangle, \left\langle\overline{3}\right\rangle, \left\langle\overline{6}\right\rangle\right\}$.

Veamos que ζ_1 *es filtro de continuidad. Para ello, sean* $I, J \in \zeta_1$ *y* $f \in \mathrm{Hom}_A(I, A)$. *Usando el hecho que* f *es* A*-homomorfismo, se sigue que para todo* $x \in A$, $f(x\overline{a}) = xf(\overline{a})$, *es decir,* $\mathrm{Im}(f) = \langle f(\overline{a})\rangle$.

Para $I = A = \left\langle\overline{1}\right\rangle$ *tenemos la siguiente tabla que define todos los* A*-homomorfismo* f*:*

$f(x)$ \ $f(\overline{1})$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$f\left(\overline{0}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$f\left(\overline{1}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$f\left(\overline{2}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$f\left(\overline{3}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$f\left(\overline{4}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$
$f\left(\overline{5}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$
$f\left(\overline{6}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$
$f\left(\overline{7}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$f\left(\overline{8}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$f\left(\overline{9}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$f\left(\overline{10}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$f\left(\overline{11}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Sea $I = \left\langle\overline{2}\right\rangle$. *Como* $\overline{0} = \overline{6}f(\overline{2})$, *entonces* $f(\overline{2}) \in \left\langle\overline{2}\right\rangle$. *De esta manera, todos los* A*-homomorfismo* f *son plasmados en la siguiente tabla:*

$f(x)$ \ $f(\overline{2})$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$f\left(\overline{0}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$f\left(\overline{2}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$f\left(\overline{4}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$
$f\left(\overline{6}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$
$f\left(\overline{8}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$f\left(\overline{10}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$

Sea $I = \left\langle\overline{3}\right\rangle$. *Como* $\overline{0} = \overline{4}f(\overline{3})$, *entonces* $f(\overline{3}) \in \left\langle\overline{3}\right\rangle$. *Así, todos los* A*-homomorfismo* f *son descritos en la siguiente tabla:*

$f(x)$ \ $f(\overline{3})$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$f\left(\overline{0}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$f\left(\overline{3}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$f\left(\overline{6}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$
$f\left(\overline{9}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$

Si $I = \left\langle\overline{6}\right\rangle$ *y como* $\overline{0} = \overline{2}f(\overline{6})$, *entonces* $f(\overline{6}) \in \left\langle\overline{6}\right\rangle$. *Por lo que todos los* A*-homomorfismos* f *son únicamente dos:*

$f(x)$ \ $f(\overline{6})$	$\overline{0}$	$\overline{6}$
$f\left(\overline{0}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$f\left(\overline{6}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{6}$

Con base a las tablas anteriores se concluye que $f^{-1}(J) \in \zeta_1$, para cada $J \in \zeta_1$.

Por lo tanto, ζ_1 es un filtro de continuidad. Sin embargo, ζ_1 no es filtro de Gabriel. Verifiquemos esta última afirmación, sea $K = \langle \overline{4} \rangle$ y $a \in \langle \overline{6} \rangle$, tenemos:

- *Para $a = \overline{0}$, $\left(K : \overline{0}\right) = A$.*
- *Para $a = \overline{6}$, $\left(K : \overline{6}\right) = \left\{x \in A : x\overline{6} \in K\right\} = \langle \overline{2} \rangle$.*

Por tanto, para cada $a \in \langle \overline{6} \rangle$, $(K : a) \in \zeta_1$, pero $K \notin \zeta_1$, es decir, ζ_1 no es un filtro de Gabriel.

Obsérvese que el filtro de continuidad del ejemplo previo si que cumple con la definición de filtro lineal, es decir, es un ejemplo de filtro de continuidad que es filtro lineal, pero no es filtro de Gabriel. El siguiente ejemplo nos proporciona un filtro de continuidad que no es filtro lineal.

■ **Ejemplo 4.1.4.** *Sea A un dominio entero y $\zeta = \{0, A\}$, claramente ζ no es un filtro lineal. Veamos que ζ si es un filtro de continuidad.*

- *$A \in \zeta$.*
- *Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(0, A)$, entonces $\varphi = 0$. Por tanto, para cada $J \in \zeta$, $0 = \varphi^{-1}(J)$.*

  Ahora, sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A, A)$. Si $\varphi = 0$, entonces para cada $J \in \zeta$, $\varphi^{-1}(J) = A \in \zeta$. Supongamos que $\varphi \neq 0$, es decir $\varphi(1) \neq 0$.

  φ es inyectiva: para verificar esto sean $a, b \in A$ tal que $\varphi(a) = \varphi(b)$, entonces $a\varphi(1) = b\varphi(1)$, implica que $a = b$, pues $\varphi(1) \neq 0$ y A es dominio entero, así $\varphi^{-1}(0) = 0$. Y claramente $\varphi^{-1}(A) = A$.

Los puntos anteriores muestran que ζ es un filtro de continuidad, pero no un filtro lineal.

Ya tenemos ejemplos de filtros de continuidad que no son filtros de Gabriel o filtros lineales, pero ¿habrá filtros lineales que no sea filtros de continuidad? El siguiente ejemplo da respuesta afirmativa a esta cuestión.

■ **Ejemplo 4.1.5.** *Sea $p \in \mathbb{N}$ número primo. Consideremos $\zeta = \{\mathbb{Z}, p\mathbb{Z}\}$. Veamos que ζ es filtro lineal:*

(1) *$p\mathbb{Z}$ es ideal máximo en $\mathbb{Z}$ por lo tanto, si $J \in \mathcal{I}(\mathbb{Z})$ tal que $p\mathbb{Z} \subseteq J$, entones $J \in \{p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\} = \zeta$.*

(2) *$p\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z} \in \zeta$.*

(3) *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, tenemos que $(\mathbb{Z} : n) = \mathbb{Z}$ y*

$$\begin{aligned}(p\mathbb{Z} : n) &= \{x \in \mathbb{Z} : xn \in p\mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} : p|xn\} = \{x \in \mathbb{Z} : p|x \ o \ p|n\} \\ &= \begin{cases} \mathbb{Z} & si \quad p|n \\ p\mathbb{Z} & si \quad p \nmid n. \end{cases}\end{aligned}$$

Por lo tanto, de $(1) - (3)$ se tiene que ζ es filtro lineal. Ahora, veamos que no es filtro de continuidad, para ello consideremos $q \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{mcd}(p, q) = 1$ y el siguiente $\mathbb{Z}$-homomorfismo $h : p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dado por $h(px) = qx$, así $h^{-1}(p\mathbb{Z}) = \{px \in p\mathbb{Z} : h(px) \in p\mathbb{Z}\} = \{px \in \mathbb{Z} : qx \in p\mathbb{Z}\} = \{px \in \mathbb{Z} : p|x\} = p^2\mathbb{Z}$. Por lo tanto, ζ no es filtro de continuidad.

Ahora bien, tenemos una implicación entre filtros de Gabriel y filtros de continuidad.

Proposición 4.1.6. *Si $\mathcal{G}$ un filtro de Gabriel en A, entonces $\mathcal{G}$ es un filtro de continuidad en A.*

Dem.
Sea $\mathcal{G}$ un filtro de Gabriel. Entonces,

(1) Claramente $A \in \mathcal{G}$.

(2) Sean $I, J \in \mathcal{G}$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(I, A)$. Para cada $a \in I$, tenemos

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}(J) : a\right) &= \left\{b \in A : ba \in f^{-1}(J)\right\} = \{b \in A : f(ba) \in J\} = \{b \in A : bf(a) \in J\} \\ &= (J : f(a)) \,.\end{aligned}$$

Dado que $J \in \mathcal{G}$, entonces del inciso (i) de la definición 2.2.6 se tiene que para cada $a \in I$, $\left(f^{-1}(J) : a\right) = (J : f(a)) \in \mathcal{G}$ y por el inciso (ii) se concluye que $f^{-1}(J) \in \mathcal{G}$.

Por lo tanto, $\mathcal{G}$ es un filtro de continuidad.

Q.E.D

Por la proposición 4.1.6 sabemos que todo filtro de Gabriel es filtro de continuidad, sin embargo el ejemplo 4.1.3 muestra que el recíproco es falso, además los ejemplos 4.1.4 y 4.1.5 prueban que no hay implicación directa entre los filtros lineales y los de continuidad, esto es, que un filtro lineal no tiene por que ser filtro de continuidad y viceversa, es decir, hemos obtenido un tercer tipo de filtro (que contiene a los de Gabriel). En este punto surge la siguientes preguntas:

Pregunta 4.1.7. *¿Cuándo los filtros de continuidad coinciden con los filtro de Gabriel?*

Pregunta 4.1.8. *¿Cuándo los filtros de continuidad coinciden con los filtros lineales?*

Bien, a continuación tendremos dos ejemplos que dan respuesta parcial a las preguntas planteadas previamente.

■ **Ejemplos 4.1.9.** (1) *Sea A un anillo auto-inyectivo. Si $\mathcal{L}$ es un filtro lineal, entonces $\mathcal{L}$ es filtro de continuidad: Evidentemente $A \in \mathcal{L}$, así que veamos que si $I, J \in \mathcal{L}$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(I, A)$, entonces $f^{-1}(J) \in \mathcal{L}$. Existe $\hat{f} : A \longrightarrow A$ tal que $\hat{f} \circ \iota_I = f$, donde ι_I es el A-homomorfismo inclusión de I a A, se sigue que*

$$f^{-1}(J) = \iota_I^{-1}\left(\hat{f}^{-1}(J)\right) = I \cap \left(J : \hat{f}(1)\right) \in \mathcal{L}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}$ es un filtro de continuidad.

(2) *Sea A un anillo semisimple. Aquí los filtros lineales, de Gabriel y de continuidad coinciden. Ya sabemos que los filtros lineales y de Gabriel coinciden en estos anillos, entonces solo mostraremos que los filtros de continuidad también. Por lo dicho previamente y de la proposición 4.1.6 es suficiente con mostrar que cada filtro de continuidad es filtro lineal. Sea ζ un filtro de continuidad en A, $I \in \zeta$ tales que $I \leq J$. Por ser A semisimple, existe $K \in \mathcal{I}(A)$ tal que $J \bigoplus K = A$, así que $\pi_K^{-1}(I) = J$, donde $\pi_K : J \bigoplus K \longrightarrow J \bigoplus K$ esta dada por $\pi_K(j + k) = k$. Esto implica que $J \in \zeta$, es decir, ζ es un filtro lineal.*

El siguiente resultado muestra que cada intersección de filtros de continuidad es un filtro de continuidad (como la intersección de filtros lineales es filtro lineal). Más aún, nos muestra que dado un filtro de continuidad podemos describir el filtro lineal más pequeño que lo contiene.

Proposición 4.1.10. *Para un anillo A, las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) *Sea $\{\zeta_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ una familia no vacía de filtros de continuidad en A. Entonces $\bigcap\limits_{\alpha \in \Delta} \zeta_\alpha$ es un filtro de continuidad.*

(2) *$\mathcal{L}(\zeta) := \bigcup\limits_{I \in \zeta} \{J : I \subseteq J\}$ es el filtro lineal más pequeño que contiene a ζ.*

Dem.
Sea A un anillo.

(1) Sea $\{\zeta_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia de filtros de continuidad no vacía de A. Para todo $\alpha \in \Delta$, $A \in \zeta_\alpha$ entonces $A \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} \zeta_\alpha$. Ahora, sean $I, J \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} \zeta_\alpha$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(I, A)$. Tenemos que $\alpha \in \Delta$, $I, J \in \zeta_\alpha$, implica que $f^{-1}(J) \in \zeta_\alpha$, así $f^{-1}(J) \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} \zeta_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} \zeta_\alpha$ es un filtro de continuidad.

(2) Veamos que $\mathcal{L}(\zeta)$ es un filtro lineal.

   (i) Si $I \in \mathcal{L}(\zeta)$ y $J \in \mathcal{I}(J)$ tales que $I \subseteq J$, entonces $J \in \{I : I \subseteq J\}$, así que $J \in \mathcal{L}(\zeta)$.

   (ii) Si $I, J \in \mathcal{L}(\zeta)$, entonces existen $I', J' \in \zeta$ tales que $I' \subseteq I$ y $J' \subseteq J$, esto implica que $I' \cap J' \subseteq I \cap J$. Así que $I' \cap J' \in \zeta$ por el teorema 4.1.3 inciso (i), por lo tanto $I \cap J \in \mathcal{L}(\zeta)$.

   (iii) Sea $J \in \mathcal{L}(\zeta)$, existe $I \in \zeta$ tal que $I \subseteq J$. Sea $a \in A$, tenemos que $(I : a) \in \zeta$ por el teorema 4.1.3 inciso (ii). Ahora, si $r \in (I : a)$, entonces $ra \in I \subseteq J$; esto implica que $r \in (J : a)$. Se sigue que $(I : a) \subseteq (J : a)$, por lo tanto $(J : a) \in \mathcal{L}(\zeta)$.

   De (i)-(iii) se concluye que $\mathcal{L}(\zeta)$ es un filtro lineal. Por lo tanto, es el filtro lineal más pequeño que contiene a ζ por construcción, ya que si $\mathcal{L}$ es un filtro lineal tal que $\zeta \subseteq \mathcal{L}$, entonces

$$\{J : I \subseteq J\} \subseteq \mathcal{L}, \text{ para cada } I \in \zeta.$$

Q.E.D

4.2. Filtros lineales, de Gabriel y de continuidad en dominios de ideales principales (DIPs)

En esta sección abordaremos la clasificación de filtros lineales, de Gabriel y de continuidad con la finalidad de tener sobre la mesa las diferencias o similitudes de estos tres conceptos.

4.2.1. Clasificación de los filtros lineales en DIPs

Sea A un DIP, Ω un conjunto de elementos primos de A no asociados dos a dos y que para cualquier otro primo es asociado a algún elemento de Ω (Esto lo podemos hacer pues ser asociado es una relación de equivalencia). Sea $\mathcal{Q} \subseteq \Omega$ y $f \in {\mathbb{N}^*}^{\mathcal{Q}}$, donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ definimos la siguiente familia de ideales

$$\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)} := \Big\{ \langle p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \rangle : p_j \in \mathcal{Q} \quad \text{y} \quad 0 \leq n_j \leq f(p_j) \ \text{ , donde } \ j \in \{1, \ldots, k\} \ \text{ y } \ n_j, k \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Si $\mathcal{Q} = \emptyset$, entonces definimos

$$\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)} := \big\{A\big\}, \text{ donde } f \text{ es la función vacía.}$$

Proposición 4.2.1. *Sea A un DIP. Para cada $\mathcal{Q} \subseteq \Omega$ y $f \in (\mathbb{N}^*)^{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$ es un filtro lineal.*

Dem.
Si $\mathcal{Q} = \emptyset$, entonces no hay nada que hacer, pues $\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)} = \{A\}$ es un filtro lineal. Supongamos ahora que $\mathcal{Q} \neq \emptyset$.

(i) Sea $\langle a \rangle \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$. Si $\langle a \rangle = A$, entonces la condición (1) de la definición 2.2.1 se cumple trivialmente.

   Supongamos que $\langle a \rangle \neq A$. Existen $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{Q}$ distintos, $n_1, \ldots, n_k$ con $1 \leq n_j \leq f(p_j)$ para $j \in \{1, \ldots, k\}$ tales que $\langle a \rangle = \langle p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \rangle$. Ahora, sea $\langle b \rangle \in \mathcal{I}(A)$ tal que $\langle a \rangle \leq \langle b \rangle$, esto es

$$\langle p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \rangle \leq \langle b \rangle \quad \Rightarrow \quad b \mid p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \tag{4.1}$$

Dado que A es un DFU, entonces existen únicos $q_1, \ldots, q_s$ elementos primos distintos no asociados y $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$ tales que

$$b = q_1^{m_1} \cdots q_s^{m_s} \quad \Rightarrow \quad q_j^{r_j} \mid b, \text{ con } 1 \le r_j \le m_j \text{ y } j \in \{1, \ldots, s\} \tag{4.2}$$

Ahora, de 4.1 y 4.2 se sigue que $q_j \mid p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ y $q_j^{m_j} \mid p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ para cada $j \in \{1, \ldots, s\}$, entonces para cada $j \in \{1, \ldots, s\}$ tenemos que existe $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $q_j \mid p_{i_j}$ y como ambos son primos, entonces son asociados, esto es, existe $u_j \in \mathrm{U}(A)$ tal que $u_j p_{i_j} = q_j$. Los p_i no son asociados, en particular cualquiera dos distintos son primos relativos y como para cada $j \in \{1, \ldots, s\}$ se tiene que $q_j^{m_j} \mid p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, entonces

$$\langle a \rangle \le \langle q_j^{m_j} \rangle = \left\langle u_j^{m_j} p_{i_j}^{m_j} \right\rangle = \left\langle p_{i_j}^{m_j} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad p_{i_j}^{m_j} \mid a \quad \Rightarrow \quad p_{i_j}^{m_j} \mid p_{i_j}^{n_{i_j}},$$

se sigue que $m_j \le n_{i_j} \le f(p_{i_j})$ y además

$$\langle b \rangle = \langle q_1^{m_1} \cdots q_s^{m_s} \rangle = \left\langle u_1^{m_1} \cdots u_s^{m_s} p_{i_1}^{m_1} \cdots q_{i_s}^{m_s} \right\rangle = \left\langle p_{i_1}^{m_1} \cdots q_{i_s}^{m_s} \right\rangle.$$

En consecuencia, $\langle b \rangle \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$.

(ii) Sean $\langle a \rangle, \langle b \rangle \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$. Entonces

(I) Existen $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{Q}$ distintos, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ con $1 \le n_j \le f(p_j)$, $j \in \{1, \ldots k\}$ tales que

$$\langle a \rangle = \langle p_1^{n_1} \cdots p_l^{n_k} \rangle.$$

(II) Existen $q_1, \ldots, q_l \in \mathcal{Q}$ distintos, $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}$ con $1 \le m_i \le f(p_i)$, $i \in \{1, \ldots l\}$ tales que

$$\langle a \rangle = \langle q_1^{m_1} \cdots q_l^{m_l} \rangle.$$

Consideremos el conjunto $\{p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots q_l\}$ y $w_1, \ldots, w_r \in \mathcal{Q}$ distintos tales que

$$\{p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots q_l\} = \{w_1, \ldots, w_r\}$$

esto lo podemos hacer, pues podemos volver a etiquetarlos. Ahora, para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$ sean $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{N}_\circ$ definidas como

$$\alpha_j = \begin{cases} n_i & \text{si } w_j = p_i \\ 0 & w_j \notin \{p_1, \ldots, p_k\} \end{cases} \quad y \quad \beta_j = \begin{cases} m_i & \text{si } w_j = q_i \\ 0 & w_j \notin \{q_1, \ldots, q_k\} \end{cases}$$

Así, $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} = w_1^{\alpha_1} \cdots w_r^{\alpha_r}$ y $q_1^{m_1} \cdots q_l^{m_l} = w_1^{\beta_1} \cdots w_r^{\beta_r}$. Ahora,

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle w_1^{\alpha_1} \cdots w_r^{\alpha_r} \rangle \cap \left\langle w_1^{\beta_1} \cdots w_r^{\beta_r} \right\rangle = \left\langle \operatorname{mcm}\left(w_1^{\alpha_1} \cdots w_r^{\alpha_r}, w_1^{\beta_1} \cdots w_r^{\beta_r} \right) \right\rangle.$$

Afirmación: $\operatorname{mcm}\left(w_1^{\alpha_1} \cdots w_r^{\alpha_r}, w_1^{\beta_1} \cdots w_r^{\beta_r} \right) = w_1^{\text{máx}\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdots w_r^{\text{máx}\{\alpha_r,\beta_r\}}$.

Claramente $w_1^{\alpha_1} \cdots w_r^{\alpha_r}$ y $w_1^{\beta_1} \cdots w_r^{\beta_r}$ dividen a $\displaystyle\prod_{j=1}^{r} w_1^{\text{máx}\{\alpha_1,\beta_1\}}$. Sea $d \in A$, tal que $w_1^{\alpha_1} \cdots w_r^{\alpha_r}$ y $w_1^{\beta_1} \cdots w_r^{\beta_r}$ lo dividen, entonces para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$ $w_j^{\alpha_j}$ y $w_j^{\beta_j}$ lo dividen, así que $w_j^{\text{máx}\{\alpha_j,\beta_j\}}$ lo divide, esto implica que

$$w_1^{\text{máx}\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdots w_r^{\text{máx}\{\alpha_r,\beta_r\}} \mid d$$

Por lo tanto, $\operatorname{mcm}\left(w_1^{\alpha_1} \cdots w_r^{\alpha_r}, w_1^{\beta_1} \cdots w_r^{\beta_r} \right) = w_1^{\text{máx}\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdots w_r^{\text{máx}\{\alpha_r,\beta_r\}}$. De la afirmación se sigue que:

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \left\langle w_1^{\text{máx}\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdots w_r^{\text{máx}\{\alpha_r,\beta_r\}} \right\rangle.$$

Como $0 \le \alpha_j, \beta_j \le f(w_j)$ para $j \in \{1, \ldots r\}$, entonces $0 \le \text{máx}\{\alpha_j, \beta_j\} \le f(w_j)$ para $j \in \{1, \ldots, r\}$. Por lo tanto, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$

(iii) Sean $\langle a\rangle \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$ y $b \in A$. Por la proposición 1.2.12 inciso (c), se sigue que

$$(\langle a\rangle : b) = \langle a'\rangle\,, \quad \text{donde } a = a' \operatorname{mcd}(a,b)$$

De modo que $a' \mid a$, en otras palabras $\langle a\rangle \leq \langle a'\rangle = (\langle a\rangle : b)$, por (i) se concluye que $(\langle a\rangle : b) \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$.

De (i), (ii) y (iii) se sigue que $\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$ es un filtro lineal.

Q.E.D

Teorema 4.2.2. *Sea A un DIP. Cada filtro lineal de A es de la forma $\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$ para algún $\mathcal{Q} \subseteq \Omega$ y $f \in {\mathbb{N}^*}^{\mathcal{Q}}$.*

Dem.
Sea $\mathcal{L}$ un filtro lineal de A. Sea $\mathcal{Q}$ los elementos primos $p \in \Omega$ tal que $\langle p\rangle \in \mathcal{L}$. Si $\mathcal{Q} = \emptyset$, entonces $\mathcal{L} = \{A\}$, por lo que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(\emptyset,f)}$, donde f es la función vacía.

Supongamos que $\mathcal{Q} \neq \emptyset$. Definamos la siguiente función $f : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ dada por

$$f(p) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N} : \langle p^k\rangle \in \mathcal{L}\} & \text{si existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \langle p^k\rangle \in \mathcal{L} \text{ y } \langle p^{k+1}\rangle \notin \mathcal{L} \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$.

$(\subseteq)$ Sea $\langle a\rangle \in \mathcal{L}$. Por ser A DFU, entonces existen únicos $p_1, \ldots, p_k$ elementos primos y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que

$$a = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \quad \Rightarrow \quad \langle a\rangle \leq \left\langle p_j^{\lambda_j}\right\rangle \text{ donde } 1 \leq \lambda_j \leq n_j,\ j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Por ser $\mathcal{L}$ filtro lineal se sigue que para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, $\left\langle p_j^{\lambda_j}\right\rangle \in \mathcal{L}$. En particular, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, $\langle p_j\rangle, \langle p_j^{n_j}\rangle \in \mathcal{L}$. Ahora, como cada p_j es elemento primo, entonces existe $q_j \in \Omega$ asociado a p_j, esto es, existe $u_j \in \mathrm{U}(A)$ tales que $p_j = u_j q_j$, entonces para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, tenemos

$$\langle q_j\rangle = \langle u_j q_j\rangle = \langle p_j\rangle \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad q_j \in \mathcal{Q}. \tag{4.3}$$

$$\langle q_j^{n_j}\rangle = \langle u_j^{n_j} q_j^{n_j}\rangle = \langle p_j^{n_j}\rangle \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad n_j \leq f(q_j). \tag{4.4}$$

De 4.3 y 4.4 Se sigue que:

$$\langle a\rangle = \langle p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}\rangle = \langle u_1^{n_1} \cdots u_k^{n_k} q_1^{n_1} \cdots q_k^{n_k}\rangle = \langle q_1^{n_1} \cdots q_k^{n_k}\rangle \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}. \tag{4.5}$$

Por lo tanto, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$.

$(\supseteq)$ Sea $\langle b\rangle \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$. Existen $q_1, \ldots, q_r \in \mathcal{Q}$ distintos, $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ tales que $\langle b\rangle = \langle q_1^{n_1} \cdots q_r^{n_r}\rangle$ y para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, $1 \leq m_j \leq f(q_j)$.

Por definición de $\mathcal{Q}$ y f se sigue que para cada $j \in \{1, \ldots r\}$ se tiene que $\left\langle q_j^{m_r}\right\rangle \in \mathcal{L}$. Ahora, dado que los p_j son distintos y no son asociados dos a dos (esto último es porque están en Ω), entonces son primos relativos dos a dos, en consecuencia,

$$\langle b\rangle = \langle b\rangle = \langle q_1^{n_1} \cdots q_r^{n_r}\rangle = \langle \operatorname{mcm}(q_1^{n_r}, \ldots, q_r^{n_r})\rangle\,. \tag{4.6}$$

Por ser $\mathcal{L}$ filtro de continuidad, se tiene que

$$\langle \operatorname{mcm}(q_1^{n_r}, \ldots, q_r^{n_r})\rangle = \bigcap_{j=1}^{r} \langle q_j^{n_j}\rangle \in \mathcal{L}. \tag{4.7}$$

De 4.6 y 4.7 se concluye que $\langle b\rangle \in \mathcal{L}$. Por lo tanto, $\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)} \subseteq \mathcal{L}$.

Se concluye que $\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)} = \mathcal{L}$.

Q.E.D

La proposición 4.2.1 y el teorema 4.2.2 nos dicen cómo son exactamente los filtros lineales en un DIP. Ahora, una pequeña observación que en realidad es la respuesta a la siguiente pregunta, ¿Y cómo son los filtros lineales de cardinalidad finita? La respuesta es muy simple y es que quedan totalmente determinados por un elemento $a \in A$.

Sea $a \in A$, definamos $\mathcal{L}_a = \{\langle d \rangle : d \mid a\}$. Observemos que $\mathcal{L}_a$ es de cardinalidad finita, pues A es DFU y además si $a \in \mathrm{U}(A)$, entonces $\mathcal{L}_a = \{A\}$.

Proposición 4.2.3. *$\mathcal{L}_a$ es filtro lineal.*

Dem.
(i) Sea $\langle d \rangle \in \mathcal{L}_a$ y $\langle d \rangle \leq \langle d' \rangle$. Se tiene que $d' \mid d$ y por definición de $\mathcal{L}_a$ se cumple que $d \mid a$, entonces por transitividad $d' \mid a$, por lo tanto, $\langle d' \rangle \in \mathcal{L}_a$

(ii) Sean $\langle d_1 \rangle, \langle d_2 \rangle \in \mathcal{L}_a$. Entonces, $d_1 \mid a$ y $d_2 \mid a$ por lo que $\mathrm{mcm}(d_1, d_2) \mid a$ (definición de mínimo común múltiplo), se sigue que

$$\langle d_1 \rangle \cap \langle d_2 \rangle = \langle \mathrm{mcm}(d_1, d_2) \rangle \in \mathcal{L}_a.$$

.

(iii) Sea $\langle d \rangle \in \mathcal{L}_a$ y $b \in A$. Por la proposición 1.2.12 inciso (c) se sigue que

$$\big(\langle d \rangle : b \big) = \langle d' \rangle, \text{ donde } d = d' \,\mathrm{mcd}(d, b),$$

es decir, $d' \mid d$ y $d \mid a$, por lo que $d' \mid a$, entonces $\big(\langle d \rangle : b \big) \in \mathcal{L}_a$.

De (i), (ii) y (iii) se concluye que $\mathcal{L}_a$ es un filtro lineal.

Q.E.D

Corolario 4.2.4. *Sea A un DIP y $\mathcal{L}$ un filtro lineal de cardinalidad finita, entonces existe $a \in A$ tal que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_a$.*

Dem.
Sea $\mathcal{L}$ un filtro lineal de cardinalidad finita y digamos que $\mathcal{L} = \{\langle a_1 \rangle, \ldots, \langle a_k \rangle\}$.

Sea $a = \mathrm{mcm}\,(a_1, \ldots, a_k)$. Veamos que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_a$. Por definición de $\mathcal{L}_a$ y que $\mathcal{L}$ es filtro lineal, entonces $\bigcap_{j=1}^{k} \langle a_j \rangle = \langle \mathrm{mcm}\,(a_1, \ldots, a_k) \rangle = \langle a \rangle \in \mathcal{L}_a \cap \mathcal{L}$. Ahora,

($\subseteq$) Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ se tiene que $\langle a_j \rangle \in \mathcal{L}_a$, pues $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} \langle a_j \rangle \leq \langle a_j \rangle$. Por lo tanto, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_a$.

($\supseteq$) Sea $d \in A$ tal que $d \mid a$, entonces $\langle a \rangle \leq \langle d \rangle$ y por ser $\mathcal{L}$ filtro lineal, se sigue que $\langle d \rangle \in \mathcal{L}$. Por lo tanto, $\mathcal{L}_a \subseteq \mathcal{L}$.

Por lo tanto, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_a$.

Q.E.D

4.2.2. Clasificación de los filtros de Gabriel en DIPs

Sabemos que los filtros de Gabriel en un DIP ya esta clasificados (de hecho, la clasificación es mucho más general), lo cual describiremos enseguida.

Dado un anillo conmutativo A su espectro se define como

$$\mathrm{Spec}(A) := \{P \in \mathcal{I}(A) : P \text{ es ideal primo}\}.$$

Para cada $I \in \mathcal{I}(A)$, se define el siguiente conjunto

$$V(I) := \{P \in \operatorname{Spec}(A) : I \subseteq P\}$$

Ahora, consideremos A un DIP. Los filtros de Gabriel en A son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\mathscr{P}} &:= \{\langle a \rangle : V(\langle a \rangle) \cap \mathscr{P} = \emptyset\} \\ &= \{\langle a \rangle : \text{ para todo } p \in A \text{ irreducible tal que } p|a, \text{ entonces } \langle p \rangle \notin \mathscr{P}\},\end{aligned}$$

donde $\mathscr{P} \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ no vacío.

4.2.3. Clasificación de los filtros de continuidad en DIPs

Lema 4.2.5. *Sea A un DIP y $\zeta \subseteq \mathcal{I}(A)$. ζ es un filtro de continuidad si y solo si se cumplen:*

(i) $A \in \zeta$.

(ii) *Para cada $a, b, k \in A$ tales que $\langle a \rangle, \langle b \rangle \in \zeta$ se tiene que $\langle b'a \rangle \in \zeta$, donde $b = \operatorname{mcd}(b,k)b'$.*

Dem.
$(\Rightarrow)$ Supongamos que ζ es un filtro de continuidad, en particular $A \in \zeta$, es decir, (i) se cumple. Para mostrar la veracidad de (ii) sean $a, b, k \in A$ tales que $\langle a \rangle, \langle b \rangle \in \zeta$ y sea $b' \in A$ tal que $b = \operatorname{mcd}(b,k)b'$.

Si $a = 0$, entonces no hay nada que hacer, por lo que supondremos que $a \neq 0$. Consideremos la siguiente asignación $\varphi : \langle a \rangle \longrightarrow A$ dada por $\varphi(ra) = rk$. Veamos $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(\langle a \rangle, A)$, si $ra = sa$, entonces $r = s$ por ser A un DIP, ahora, sean $ra, sa \in \langle a \rangle$ y $\lambda \in A$. Tenemos

- $\varphi(ra + \lambda(sa)) = \varphi((r + \lambda s)a) = (r + \lambda s)k = rk + \lambda(sk) = \varphi(ra) + \lambda\varphi(sa)$.

Por tanto, φ es A-homomorfismo. Como ζ es filtro de continuidad se sigue que $\varphi^{-1}(\langle b \rangle) \in \zeta$.

Ahora,

$$\begin{aligned} ra \in \varphi^{-1}(\langle b \rangle) &\Leftrightarrow rk = \varphi(ra) \in \langle b \rangle \\ &\Leftrightarrow r \in (\langle b \rangle : k) = \langle b' \rangle, \quad \text{por inciso } (c) \text{ de la proposición 1.2.12}\end{aligned}$$

Se sigue que $\varphi^{-1}(\langle b \rangle) = \{ra : r \in \langle b' \rangle\} = \langle b' \rangle a = \langle b'a \rangle$, está última igualdad es en virtud del inciso (3) del proposición 1.2.11. Por lo tanto, $\langle b'a \rangle \in \zeta$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que se cumplen (i) y (ii). Veamos que ζ es filtro de continuidad, por (i) tenemos que $A \in \zeta$, nos resta mostrar que se cumple el inciso (2) de la definición 4.1.1. Sean $\langle a \rangle, \langle b \rangle \in \zeta$ y $f \in \operatorname{Hom}_A(\langle a \rangle, A)$. Verifiquemos que $f^{-1}(\langle b \rangle) \in \zeta$, tenemos:

$$\begin{aligned} ra \in f^{-1}(\langle b \rangle) &\Leftrightarrow rf(a) = f(ra) \in \langle b \rangle \\ &\Leftrightarrow r \in (\langle b \rangle : f(a)).\end{aligned}$$

Sea $b' \in A$ tal que $b = \operatorname{mcd}(b, f(a))b'$, entonces por el inciso (c) de la proposición 1.2.12 tenemos que $\langle b' \rangle = (\langle b \rangle : f(a))$ y por el inciso (3) de la proposición 1.2.11 y (ii) se sigue que

$$f^{-1}(\langle b \rangle) = \{ra : r \in \langle b' \rangle\} = \langle b' \rangle a = \langle b'a \rangle \in \zeta.$$

Por lo tanto, ζ es un filtro de continuidad.

Q.E.D

El lema 4.2.5 nos da otra manera de describir un filtro de continuidad en un DIP. Por otro lado, el siguiente resultado nos permite afirmar que en un DIP los filtros de continuidad que no tienen al ideal cero son filtros lineales.

Teorema 4.2.6. *Sea A un DIP y $\zeta \subseteq \mathcal{I}(A)$ no vacía, tal que $0 \notin \zeta$. Las siguientes condiciones son equivalente:*

(a) *ζ es un filtro de continuidad.*

(b) *Las siguientes propiedades se cumplen para ζ:*

   (1) *Si $I \in \zeta$ y $J \in \mathcal{I}(A)$ tal que $I \leq J$ entonces $J \in \zeta$.*

   (2) *Si $I, J \in \zeta$, entonces $IJ \in \zeta$.*

(c) *ζ es un filtro de Gabriel.*

Dem.
(a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que ζ es un filtro de continuidad y sean $I = \langle a \rangle, J = \langle b \rangle \in \mathcal{I}(A)$. Veamos que se cumplen las propiedades (1) y (2):

(1) Supongamos que $I \leq J$ con $I \in \zeta$. Como $0 \notin \zeta$, entonces existe $\lambda \in A \setminus \{0\}$ tal que $a = \lambda b$. Consideremos el A-homomorfismo $f_\lambda : A \longrightarrow A$ dada por $f_\lambda(x) = x\lambda$. Entonces $J = f_\lambda^{-1}(I)$, veamos que dicha afirmación es verdadera:

   ($\supseteq$) Sea $x \in f_\lambda^{-1}(I)$. Tenemos que $x\lambda = f_\lambda(x) \in I$. Existe $\alpha \in A$, tal que $x\lambda = \alpha a = \alpha(\lambda b)$

$$\Rightarrow \lambda(x - \alpha b) = 0 \Rightarrow x = \alpha b, \text{ pues } \lambda \neq 0 \Rightarrow x \in J = \langle b \rangle.$$

   Por lo tanto, $J \supseteq f_\lambda^{-1}(I)$.

   ($\subseteq$) Sea $x \in J$. Entonces $x = \beta b$, para algún $\beta \in A$. Tenemos

$$f_\lambda(x) = f_\lambda(\beta b) = \lambda(\beta b) = \beta(\lambda b) = \beta a \in I \Rightarrow x \in f_\lambda^{-1}(I).$$

   Por lo tanto, $J \subseteq f_\lambda^{-1}(I)$.

   Lo previo muestra lo deseado.

(2) Supongamos que $I, J \in \zeta$ y considerando $k = 1$ en lema 4.2.5 y del inciso (2) de la proposición 1.2.11 se sigue inmediatamente $IJ = \langle ab \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle \in \zeta$.

Por lo tanto, se cumplen (1) y (2).

(b) $\Rightarrow$ (c) Supongamos que ζ cumple con (1) y (2). Veamos que ζ es un filtro de Gabriel, para ello mostremos que ζ cumple con los incisos (i) y (ii) de la definición 2.2.6.

(i) Sea $I = \langle a \rangle \in \zeta$ y $x \in A$. Por el proposición 1.2.12 inciso (c), se sigue que $\left\langle \frac{a}{\text{mcd}(a,x)} \right\rangle = (I : x)$ y dado que $I \leq \left\langle \frac{a}{\text{mcd}(a,x)} \right\rangle$ entonces de (1) obtenemos que $(I : x) \in \zeta$.

(ii) Sean $I = \langle a \rangle, J = \langle b \rangle \in \mathcal{I}(A)$ tales que $I \in \zeta$ y para cada $x \in I$, $(J : x) \in \zeta$. En particular, $(J : a) \in \zeta$ y por el proposición 1.2.12 inciso (c) se tiene que $\left\langle \frac{b}{\text{mcd}(b,a)} \right\rangle = (J : a)$ y dado que $I \leq \langle \text{mcd}(a,b) \rangle$, entonces por (1) se obtiene que $J = \left\langle \frac{b}{\text{mcd}(b,a)} \right\rangle \langle \text{mcd}(a,b) \rangle \in \zeta$.

Por lo tanto, de (i) y (ii) se concluye que ζ es un filtro de Gabriel.

(c) $\Rightarrow$ (a) Es la proposición 4.1.6.

Q.E.D

El teorema previo nos da la clasificación de los filtros de continuidad en un DIP que no tienen al ideal cero y concretamente nos dice que son los filtros de Gabriel que no tienen al ideal cero. Entonces, en un DIP, ¿qué relación hay entre los filtro de continuidad que tienen al ideal cero y los que no?

Proposición 4.2.7. *Sea A un DIP y ζ un filtro de continuidad en A.*

(a) *Si $0 \in \zeta$, entonces $\zeta \setminus \{0\}$ es un filtro de continuidad, de hecho es filtro lineal.*

(b) *Si $0 \notin \zeta$, entonces $\zeta \cup \{0\}$ es filtro de continuidad.*

Dem.
(a) Supongamos que $0 \in \zeta$. Obviamente $A \in \zeta \setminus \{0\}$. Veamos que se cumple el inciso (2) de la definición 4.1.1, para ello sean $I, J \in \zeta \setminus \{0\}$ y $g \in \mathrm{Hom}_A(I, A)$.

Verifiquemos que $g^{-1}(J) \in \zeta \setminus \{0\}$. Ya sabemos que $g^{-1}(J) \in \zeta$, así

- Si $g = 0$, entonces $g^{-1}(J) = I \in \zeta \setminus \{0\}$.
- Si $g \neq 0$, entonces por el inciso (1) de la proposición 1.2.11, se sigue que g es inyectiva, en particular, $\mathrm{Im}(g) \neq 0$, y dado que $J \neq 0$, entonces $0 \neq \mathrm{Im}(g) \cdot J \subseteq \mathrm{Im}(g) \cap J$, así que $\mathrm{Im}(g) \cap J \neq 0$, por lo tanto, $0 \neq g^{-1}(J)$, es decir, $g^{-1}(J) \in \zeta \setminus \{0\}$.

Por lo tanto, $\zeta \setminus \{0\}$ es un filtro de continuidad que por la proposición anterior es filtro lineal.

(b) Supongamos que $0 \notin \zeta$. Claramente $A \in \zeta \cup \{0\}$, por lo que nos resta verificar el inciso (2) de la definición 4.1.1, para ello sean $I, J \in \zeta \cup \{0\}$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(I, A)$.

Veamos que $f^{-1}(J) \in \zeta \cup \{0\}$. Ya sabemos que $f^{-1}(J) \in \zeta$, así

- Si $I, J \notin \{0\}$, entonces $f^{-1}(J) \in \zeta \cup \{0\}$.
- Si $I = 0$, entonces $f^{-1}(J) = 0 \in \zeta \cup \{0\}$.
- Si $I \neq 0$ y $J = 0$, entonces por el inciso (1) de la proposición 1.2.11 se sigue que f es inyectiva, de manera que $f^{-1}(0) = 0 \in \zeta \cup \{0\}$.

Por lo tanto, $\zeta \cup \{0\}$ es filtro de continuidad.

Q.E.D

La proposición 4.2.7 nos dice que para estudiar los filtros de continuidad en un DIP basta con estudiar a los filtros de continuidad que no tienen al ideal cero.

Corolario 4.2.8. *Sea A un DIP y $\zeta \subseteq \mathcal{I}(A)$. Entonces ζ es un filtro de continuidad si y solo si una de las siguientes condiciones se cumplen:*

(1) *ζ es un filtro de Gabriel.*

(2) *$\zeta = \mathcal{G} \cup \{0\}$, donde $\mathcal{G}$ es un filtro de Gabriel.*

Dem.
Aplicar el teorema 4.2.6 y la proposición 4.2.7

Q.E.D

En conclusión, en un DIP la proposición 4.2.1 y el teorema 4.2.2 nos dicen que todos los filtros lineales son de la forma $\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$, además un filtro de continuidad es un filtro de Gabriel o es un filtro de Gabriel unión el ideal cero, y por todo lo discutido en esta sección se deduce que tanto los filtros de Gabriel (ver clasificación) como los de continuidad deben tener cardinalidad infinita, en contra parte el corolario 4.2.4 nos dice que los filtros lineales pueden ser de cardinalidad finita y hay tantos como elementos del anillo. Todo lo anterior responde parte de las preguntas planteadas sobre los tres conceptos de filtros (lineales, de continuidad y de Gabriel) en un DIP.

4.3. Clasificación de filtros de continuidad en productos finitos de anillos

En esta sección consideraremos un numero finito de anillos $A_1, \ldots, A_n$ con unidad. Nuestra meta principal es caracterizar los filtros de continuidad en el anillo producto $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$. A continuación presentaremos funciones que usaremos durante todo el proceso de caracterización.

- Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $a \in A_i$, consideremos la siguiente función:

$$\delta_{(i,a)}(j) := \begin{cases} a & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

  Claramente $\delta_{(i,a)} \in A$.

- Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ la proyección canónica sobre la i-ésima componente $\pi_i : A \longrightarrow A_i$ esta dada por $\pi_i(f) = f(i)$.

- Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ la inclusión en la i-ésima componente $\iota_i : A_i \longrightarrow A$ esta dada por $\iota_i(a) = \delta_{(i,a)}$.

Sabemos que cada π_i es un homomorfismo de anillos y además para cada A_i-módulo izquierdo M se puede considerar como A módulo izquierdo con el siguiente producto: Para cada $f \in A$ y $m \in M$,

$$f \bullet m := \pi_i(f)m = f(i)m.$$

Ahora, iniciemos preparando el terreno para llegar a nuestra meta, para ello comenzaremos con una serie de afirmaciones básicas pero vitales; para el desenlace algunas con su prueba correspondiente y otras sin prueba pues ya son muy conocidas.

Proposición 4.3.1. *Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tenemos que las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(1) *π_i es A-homomorfismo.*

(2) *ι_i es A-homomorfismo.*

(3) *Si I es ideal izquierdo de A, entonces $\pi_i(I)$ es ideal izquierdo de A_i.*

(4) *Para K ideal izquierdo de A_i y considerando ambos como A-módulos. Si $f \in \mathrm{Hom}_A(K, A_i)$, entonces $f \in \mathrm{Hom}_{A_i}(K, A_i)$.*

Dem.
Sean $i \in \{1, \dots, n\}$, $\tau \in A$, $g, h \in A$ y $x, y \in A_i$.

(1) $\pi_i(g + fh) = (g + \tau h)(i) = \pi_i(g) + \tau(i)g(i) = \pi_i(g) + \pi_i(\tau)\pi_i(h) = \pi_i(g) + \tau \bullet \pi_i(h)$.
Por lo tanto, π_i es A-homomorfismo.

(2) Sea $j \in \{1, \dots, n\}$. Tenemos que:

$$\left(\iota_i(x) + \tau\iota_i(y)\right)(j) = \left(\delta_{(i,x)} + \tau\delta_{(i,y)}\right)(j) = \delta_{(i,x)}(j) + \tau(j)\delta_{(i,y)}(j).$$

Si $j \neq i$, entonces

$$\left(\iota_i(x) + \tau\iota_i(y)\right)(j) = 0 + \tau(j)0 = 0.$$

Si $j = i$, entonces

$$\left(\iota_i(x) + \tau\iota_i(y)\right)(j) = x + \tau(i)y = x + \tau \bullet y.$$

Se sigue que $\iota_i\left(x + \tau \bullet y\right) = \iota_i(x) + \tau\iota_i(y)$. Por lo tanto, ι_i es A-homomorfismo.

(3) Sea I un ideal izquierdo de A. Por (1) se sigue que $\pi_i(I)$ es A-submódulo izquierdo de A_i, en particular, es grupo conmutativo con la suma de A_i. Ahora, sean $a \in A_i$ y $x \in \pi_i(I)$. Existe $f \in I$, tal que $f(i) = \pi_i(f) = x$. Como I es ideal izquierdo de A, entonces $\delta_{(i,a)}f \in I$, se sigue que:

$$ax = \delta_{(i,x)}(i)f(i) = \pi_i(\delta_{(i,x)}f) \in \pi_i(I).$$

Por lo tanto, $\pi_i(I)$ es ideal izquierdo de A_i.

(4) Sea K ideal izquierdo de A_i y $f \in \operatorname{Hom}_A(K, A_i)$. Veamos que $f \in \operatorname{Hom}_{A_i}(K, A_i)$, para ello, sean $a \in A_i$, $x, y \in K$.

$$\begin{aligned} f(x+ay) &= f(x) + f(ay) = f(x) + f\left(\delta_{(i,a)}(i)y\right) = f(x) + f\left(\pi_i(\delta_{(1,a)})y\right) \\ &= f(x) + f\left(\delta_{(1,a)} \bullet y\right) = f(x) + \delta_{(1,a)} \bullet f(y) = f(x) + \pi_i(\delta_{(i,a)})f(y) \\ &= f(x) + af(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se sigue que $f \in \operatorname{Hom}_{A_i}(K, A_i)$.

Q.E.D

El siguiente resultado previo a la demostración del teorema principal es importante.

Lema 4.3.2. *Sean $A_1, \dots, A_n$ anillos, $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ y sea ζ es un filtro de continuidad en A.*

Si $I \in \zeta$, entonces para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $I_i = \prod_{j=1}^{n} K_j \in \zeta$, donde $K_j = A_j$ si $j \neq i$ y $K_i = \pi_i(I)$.

Dem.
Sea $I \in \zeta$ y $i \in \{1, \dots, n\}$. Por el teorema 1.2.3, se tiene que $I = \prod_{i=1}^{n} \pi_i(I)$. La función $\xi_i := \iota_i \circ \pi_i$ es A-homomorfismo, pues por los incisos (1) y (2) de la proposición 4.3.1 ι_i y π_i son A-homomorfismos. Dado que ζ es filtro de continuidad en A, se sigue que

$$\xi_i^{-1}(I) \in \zeta.$$

Afirmación: $\xi_i^{-1}(I) = \prod_{j=1}^{n} K_j = I_i$.

Prueba.

($\subseteq$) Sea $f \in \xi_i^{-1}(I)$. Tenemos que $\delta_{(i,f(i))} = \iota_i \circ \pi_i(f) = \xi_i(f) \in I$. Por lo que $f(i) = \delta_{(i,f(i))}(i) \in \pi_i(I)$

$$\Rightarrow \quad f \in \prod_{j=1}^{n} K_j$$

Por lo tanto, $\xi_i^{-1}(I) \subseteq \prod_{j=1}^{n} K_j$.

($\supseteq$) Sea $g \in \prod_{j=1}^{n} K_j$, $\xi_i(g) = \iota_i \circ \pi_i(g) = \delta_{(i,g(i))} \in I$, pues $g(i) \in K_i = \pi_i(I)$.

Por lo tanto, $\prod_{j=1}^{n} K_j \subseteq \xi_i^{-1}(I)$.

Se sigue que la afirmación es verdadera, por lo tanto $\prod_{j=1}^{n} K_j \in \zeta$.

Q.E.D

Teorema 4.3.3. *Sean $A_1, \dots, A_n$ con unidad, $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ y ζ una familia de ideales izquierdos de A. ζ es un filtro de continuidad de A si y solo si para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existen ζ_i filtros de continuidad en A_j tales que $\zeta = \prod_{j=1}^{n} \zeta_j := \left\{ \prod_{j=1}^{n} I_j : I_j \in \zeta_j \right\}$.*

Dem.
En esta demostración consideraremos los siguientes A-homomorfismos: la proyección canónica $\pi_i : A \longrightarrow A_i$ y la inyección canónica $\iota_i : A_i \longrightarrow A$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

($\Rightarrow$) Supongamos que ζ es filtro de continuidad en A. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. En virtud de la proposición 4.3.1 incisos (c), podemos afirmar que la siguiente familia de A-módulos izquierdos es también de ideales izquierdos de A_i:

$$\zeta_i = \{\pi_i(I) : I \in \zeta\}.$$

Veamos que ζ_i es filtro de continuidad en A_i.

(i) Como $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, se sigue que $A_i = \pi_i(A) \in \zeta_i$. Por lo tanto, $A_i \in \zeta_i$.

(ii) Sean $\pi_i(I), \pi_i(J) \in \zeta_i$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\pi_i(I), A_i)$. Veamos que $\varphi^{-1}(\pi_i(J)) \in \zeta_i$.

Por el teorema 4.3.1 inciso (2), se sigue que $I = \prod_{i=1}^{n} \pi_i(I)$. Para cada i definamos $\rho_i : I \longrightarrow \pi_i(I)$ dada por $\rho_i(x) = \pi_i(x)$ y $h_i := \iota_i \restriction_I$. Ahora, para $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ consideramos el A-homomorfismo $g_j = h_j \circ \rho_j$ y para i consideramos el A-homomorfismo $g_i = \varphi \circ \rho_i$, entonces por la propiedad universal del producto tensorial, existe un único A-homomorfismo $\hat{\varphi}_i : I \longrightarrow A$ tales que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple que: $\pi_j \circ \hat{\varphi}_j = g_j$; esto es, si $f \in I$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$\hat{\varphi}_i(f)(j) = \begin{cases} f(j) & \text{si } j \neq i \\ \varphi(f(i)) & \text{si } j = i \end{cases}$$

Ahora, como $J \in \zeta$ y ζ es filtro de continuidad en A, entonces por el lema 4.3.2 se sigue que $\hat{\varphi}_i^{-1}(J_i) \in \zeta$, donde $J_i = \prod_{j=1}^{n} K_j$, $K_j = A_j$ si $j \neq i$ y $K_i = \pi_i(J)$. Por definición de ζ_i se sigue que $\pi_i\left(\hat{\varphi}_i^{-1}(J_i)\right) \in \zeta_i$. Afirmo que $\pi_i\left(\hat{\varphi}_i^{-1}(J_i)\right) = \varphi^{-1}\left(\pi_i(J)\right)$. Veamos quién es $\hat{\varphi}_i^{-1}(J_i)$:

$$\begin{aligned}
f \in \hat{\varphi}_i^{-1}(J_i) \quad &\Leftrightarrow \quad f \in I = \prod_{j=1}^{n} \pi_j(I) \quad \text{y} \quad \hat{\varphi}_i(f) \in J_i \\
&\Leftrightarrow \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}, f(j) \in \pi_j(I) \quad \text{y} \quad \hat{\varphi}_i(f)(j) \in K_j \\
&\Leftrightarrow \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}, f(j) \in \pi_j(I) \quad \text{y} \quad f(j) = \hat{\varphi}_i(f)(j) \in A_j \\
&\qquad \text{para } j = i, f(i) \in \pi_i(I) \quad \text{y} \quad \varphi(f(i)) \in \pi_i(J). \\
&\Leftrightarrow \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}, f(j) \in \pi_j(I) \quad \text{y} \quad f(i) \in \varphi^{-1}\left(\pi_i(J)\right) \\
&\Leftrightarrow \quad f \in \prod_{j=1}^{n} L_j \quad \text{donde} \quad L_j = \pi_j(I) \text{ si } j \neq i \quad \text{y} \quad L_i = \varphi^{-1}\left(\pi_i(J)\right)
\end{aligned}$$

Esto es, $\hat{\varphi}_i^{-1}(J_i) = \prod_{j=1}^{n} L_j$. Por lo tanto, $\pi_i\left(\hat{\varphi}_i^{-1}(J_i)\right) = \varphi^{-1}\left(\pi_i(J)\right) \in \zeta_i$.

De (i) y (ii) se concluye que ζ_i es un filtro de continuidad. Más aún, $\zeta = \prod_{j=1}^{n} \zeta_j = \left\{ \prod_{j=1}^{n} I_j : I_j \in \zeta_j \right\}$. Veamos que esto último se satisface. Por construcción se sigue inmediatamente que $\zeta \subseteq \left\{ \prod_{j=1}^{n} I_j : I_j \in \zeta_j \right\}$. Nos resta probar la otra contención, sean $I_i \in \zeta_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Veamos que $\prod_{i=1}^{n} I_j \in \zeta$. Por definición de los $\zeta_i's$, se sigue que existen $K_1, \ldots, K_n \in \zeta$ tales que $\pi_i(K_i) = I_i$ y por el lema 4.3.2 se sigue que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ el ideal $\prod_{j=i}^{n} K_j^i \in \zeta$ donde $K_j^i = A_j$ si $j = i$ y $K_i^i = \pi_i(K_i) = I_i$. En consecuencia,

$$\prod_{i=1}^{n} I_i = \bigcap_{i=1}^{n} \left[\prod_{j^1}^{n} K_j^i\right] \in \zeta.$$

Por lo tanto, la afirmación es cierta.

($\Leftarrow$) Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, ζ_i es un filtro de continuidad en A_i y $\zeta = \left\{\prod_{j=1}^{n} I_j : I_j \in \zeta_j\right\}$. Veamos que ζ es un filtro de continuidad de A.

(I) Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $A_i \in \zeta_i$, pues ζ_i es filtro de continuidad, se sigue que $A = \prod_{i=1}^{n} A_i \in \zeta$.

(II) Sean $I = \prod_{i}^{n} I_i, J = \prod_{j=1}^{n} J_j \in \zeta$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(I, A)$. Veamos que $\varphi^{-1}(J) \in \zeta$.

Observación 1: Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, y cada $W \in \mathcal{I}(A_i)$, se tiene que $\pi_i^{-1}(W) = \prod_{j=1}^{n} K_j$, donde $K_j = A_j$ si $j \neq i$ y $K_i = W$. Verificación:

$$g \in \pi_i^{-1}(W) \quad \Leftrightarrow \quad \pi_i(g) = g(i) \in W \quad \Leftrightarrow \quad g \in \prod_{j=1}^{n} K_j.$$

Observación 2: $\varphi^{-1}(J) = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi^{-1}\left(\pi_i^{-1}(J_i)\right)$. Verificación:

$$\begin{aligned}
f \in \varphi^{-1}(J) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(f) \in J \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ \ \pi_i(\varphi(f)) \in J_i \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ \ \varphi(f) \in \pi_i^{-1}(J_i) \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi(f) \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(J_i) \\
&\Leftrightarrow \quad f \in \varphi^{-1}\left[\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(J_i)\right] = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi^{-1}\left(\pi_i^{-1}(J_i)\right).
\end{aligned}$$

Veamos que $\varphi^{-1}\left(\pi_i^{-1}(J_i)\right) \in \zeta$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Para ello, mostremos que $\mathrm{Nu}(\rho_i) \subseteq \mathrm{Nu}(\pi_i \circ \varphi)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por la observación 1, se sigue que:

$$\mathrm{Nu}(\rho_i) = I \cap \mathrm{Nu}(\pi_i) = \prod_{j=1}^{n} M_j, \text{ donde } M_j = I_j \text{ si } j \neq i \text{ y } M_i = \{0\}$$

$$\mathrm{Nu}(\pi_i \circ \varphi) = \varphi^{-1}(\mathrm{Nu}(\pi_i)) = \varphi^{-1}\left(\prod_{j=1}^{n} N_j\right), \text{ donde } N_j = A_j \text{ si } j \neq i \text{ y } N_i = \{0\}$$

Sea $f \in \mathrm{Nu}(\rho_i)$, entonces $0 = \rho_i(f) = f(i)$. Veamos que $f \in \mathrm{Nu}(\pi_i \circ \varphi)$. Si $f = 0$, entonces no hay nada que hacer $f \in \mathrm{Nu}(\pi_i \circ \varphi)$, por lo que supondremos que $f \neq 0$, es decir, existe $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ tal que $0 \neq f(j) = \pi_j(f) \in I_j$.

Consideremos el siguiente elemento de A:

$$\delta_k(j) := \begin{cases} 1 & \text{si } k \neq j \\ 0 & \text{si } k = j \end{cases}$$

Así, $f = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \delta_k f$. Ya que φ es A-homomorfismo, se sigue que $\varphi(f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \delta_k \varphi(f)$, en particular $\varphi(f)(i) = 0$, esto es, $\rho_i \circ \varphi(f) = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Nu}(\rho_i) \subseteq \mathrm{Nu}(\pi_i \circ \varphi)$. En virtud del teorema del factor existe $f_i : I_i \longrightarrow A_i$ A-homomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_i"'] & A \arrow[r, "\pi_i"] & A_i \\ I_i \arrow[urr, "f_i"'] & & \end{tikzcd}$$

Como I_i es ideal izquierdo de A_i y f_i es A-homomorfismo, entonces por la proposición 4.3.1 inciso (d) se sigue que f_i es A_i-homomorfismo. Dado que ζ_i es filtro de continuidad de A_i, entonces

$$f^{-1}(J_i) \in \zeta_i$$

Por la conmutatividad del diagrama previo, se sigue que:

$$\begin{aligned} f_i \circ \rho_i = \pi_i \circ \varphi \quad &\Rightarrow \quad \rho_i^{-1}\left(f_i^{-1}(J_i)\right) = (f_i \circ \rho_i)^{-1}(J_i) = (\pi_i \circ \varphi)^{-1}(J_i) = \varphi^{-1}\left(\pi_i^{-1}(J_i)\right) \\ &\Rightarrow \quad I \cap \pi_i^{-1}\left(f_i^{-1}(J_i)\right) = \varphi^{-1}\left(\pi_i^{-1}(J_i)\right). \end{aligned}$$

Por la observación 1 se sigue que $(f_i \circ \rho_i)^{-1}(J_i) = \prod_{j=1}^{n} K_j^{(i)}$, donde $K_j^{(i)} = I_j$ si $j \neq i$ y $K_i^{(i)} = f_i^{-1}(J_i)$. En consecuencia,

$$\varphi^{-1}\left(\pi_i^{-1}(J_i)\right) = \prod_{j=1}^{n} K_j^{(i)}.$$

Ahora, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, ζ_j es filtro de continuidad de A_j y como $K_j^{(i)} \in \zeta_j$, se concluye que $\varphi^{-1}\left(\pi_i^{-1}(J_i)\right) \in \zeta$, por definición de ζ. Por la observación 2, se sigue que

$$\varphi^{-1}(J) = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi^{-1}\left(\pi^{-1}(J_i)\right) = \bigcap_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} K_j^{(i)}\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(\bigcap_{i=1}^{n} K_j^{(i)}\right) \in \zeta.$$

Por lo tanto, ζ es filtro de continuidad

Q.E.D

Como corolario de teorema 4.3.3 tenemos la clasificación de los filtros de continuidad en los anillos principales conmutativos, en particular, los $\mathbb{Z}_n$ con $n \in \mathbb{N}$. Pero antes de esto, veamos la clasificación de los filtros de continuidad en un anillo principal especial.

Lema 4.3.4. *Sea A un anillo local uniserial con ideal máximo $M = \langle a \rangle$ y $\mathcal{I}(A) = \left\{M^j\right\}_{j=0}^{r}$. Los únicos filtros de continuidad de A son:*

$$\zeta_k^{(M)} := \left\{M^j\right\}_{j=0}^{k} \quad \text{con } k \in \{0, \ldots, r\}, \text{ donde } M^0 = A, M^r = 0.$$

Más aún, los filtros de continuidad son los filtros lineales.

Dem.
Veamos primero que para $k \in \{0, \ldots, r\}$, $\zeta_k^{(M)} := \left\{M^j\right\}_{j=0}^{k}$ es filtro de continuidad.

(1) $A \in \zeta_k^{(M)}$, pues $A = M^0 = \langle a^0 \rangle \in \zeta_k^{(M)}$.

(2) Sean $M^i, M^j \in \zeta_k^{(M)}$ con $i, j \in \{0, \ldots, k\}$ y $\varphi \in \operatorname{Hom}_A\left(M^i, A\right)$. Veamos que

$$\varphi^{-1}\left(M^j\right) \in \zeta_k^{(M)}.$$

Por la proposición 1.2.19 se sigue que todos los ideales izquierdos de A son bilaterales, entonces son totalmente invariantes. Así, $\varphi\left(M^k\right) \subseteq M^k$ y como $M^k \subseteq M^j$, se sigue que

$$\varphi\left(M^k\right) \subseteq M^j \Longrightarrow M^k \subseteq \varphi^{-1}\left(\varphi(M^k)\right) \subseteq \varphi^{-1}\left(M^j\right).$$

Se concluye que $\varphi^{-1}\left(M^j\right) \in \zeta_k^{(M)}$.

De (1), (2) y la definición de filtro de continuidad se concluye que $\zeta_k^{(M)}$ es filtro de continuidad. Más aún es filtro lineal, solo falta verificar que si $I, J \in \zeta_k^{(M)}$ con $I \subseteq J$, entonces $J \in \zeta_k^{(M)}$, pero eso se cumple trivialmente, y por esta condición, se observa claramente que todo filtro lineal en A es filtro de continuidad. Ahora, veamos que si ζ un filtro de continuidad de A, entonces ζ es de la forma anterior. Para ello, sea $k_0 = \max\left\{j \in \{0, \ldots, r\} : \langle a^j \rangle \in \zeta\right\}$. Veamos que $\zeta = \zeta_{k_0}^{(M)}$, la primera contención es obvia, por lo que solo falta verificar la contención $\zeta_{k_0}^{(M)} \subseteq \zeta$. Sea $l \in \{0, \ldots, k_0\}$. Tomamos $\omega = k_0 - l$. Como ζ es filtro de continuidad, entonces $\left(M^{k_0} : a^\omega\right) \in \zeta$, esto último es por el teorema 4.1.2 inciso (ii). Afirmamos que $\left(M^{k_0} : a^\omega\right) = M^l$. Mostremos la veracidad de esto último; tenemos que $a^l \in \left(M^{k_0} : a^\omega\right)$ pues $a^l a^\omega = a^{k_0}$, por lo que, $M^l \subseteq \left(M^{k_0} : a^\omega\right)$. Ahora, $\left(M^{k_0} : a^\omega\right) = M^i$ para algún $i \leq l$. Supongamos que $0 \leq i < l$, entonces en particular $a^i a^\omega = a^{i+k_0-l} \in M^{k_0}$, se sigue que $M^{i+k_0-l} \subseteq M^{k_0}$ lo cual no es posible, pues $i + k_0 - l < k_0$. Por lo tanto $i = l$, es decir , $\left(M^{k_0} : a^\omega\right) = M^l$. En consecuencias, $\zeta_{k_0}^{(M)} \subseteq \zeta$. Por lo tanto, $\zeta_{k_0}^{(M)} = \zeta$.

Q.E.D

■ **Ejemplo 4.3.5.** *Para $p, r \in \mathbb{N}$ con p número primo se tiene que los únicos filtros de continuidad en $\mathbb{Z}_{p^r}$ son:*

$$\zeta_k^{(p)} := \left\{\left\langle \overline{p^j} \right\rangle\right\}_{j=0}^{k} \quad \textit{con } k \in \{0, 1, \ldots, r\}.$$

Sabemos que $\mathbb{Z}_{p^r}$ es local uniserial, y sus ideales son:

$$\left\{\left\langle \overline{p^i} \right\rangle\right\}_{i=0}^{r}.$$

Verifiquemos esto último; recordemos que $\mathbb{Z}_{p^r}$ lo podemos ver como $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$. Ahora, por el teorema de correspondencia, sabemos que cada ideal de $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ están en correspondencia biunívoca con los ideales de $\mathbb{Z}$ que contienen a $p^r\mathbb{Z}$ y los ideales de $\mathbb{Z}$ son de la forma $m\mathbb{Z}$ con $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$p^r\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \iff m | p^r \iff m \in \left\{p^i : i = 0, \ldots, r\right\}$$

Por lo que el conjunto de ideales en $\mathbb{Z}$ que contienen a $p^r\mathbb{Z}$ es $\left\{p^i\mathbb{Z} : i = 0, \ldots, r\right\}$, en consecuencia, el conjunto de todos los ideales de $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ es:

$$\left\{p^i\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} : i = 0, \ldots, r\right\}.$$

Que en $\mathbb{Z}_{p^r}$ equivale a:

$$\left\{\left\langle \overline{p^i} \right\rangle : i = 0, \ldots, r\right\}.$$

Por lo tanto, del lema 4.3.4 se concluye lo deseado.

Teorema 4.3.6. *Sea A un* ***AIP*** *conmutativo con $A = \prod_{i=1}^{n} D_i \times \prod_{j=1}^{m} E_j$ donde cada D_i es un* ***DIP*** *y cada E_j es un* ***AIP especial****. Sea ζ un filtro de continuidad de A, entonces*

$$\zeta = \prod_{i=1}^{n} \zeta_i \times \prod_{j=1}^{m} \xi_j,$$

donde ζ_i es filtro de continuidad de D_i de acuerdo al corolario 4.2.8 y ξ_j es filtro de continuidad de E_j de acuerdo con el lema 4.3.4

Dem.
El resultado se sigue de los teoremas 4.3.3, 1.2.20, el corolario 4.2.8 y el lema 4.3.4.

Q.E.D

■ **Ejemplo 4.3.7.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{r_i}$ donde p_i es número primo y $r_i \in \mathbb{N}$. Si ζ es un filtro de continuidad de $\mathbb{Z}_n$, entonces*

$$\zeta = \prod_{i=1}^{m} \zeta_{k_i}^{(p_i)},$$

para ciertos $k_i \in \{0, \ldots, r_i\}$ con $i \in \{1, \ldots, m\}$. Se sigue de los teoremas 1.2.21 y 4.3.6.

Si bien los filtros de continuidad coinciden con los filtros lineales y de Gabriel en los anillos semisimples, y en un **DIP** un filtro de continuidad y un filtro de Gabriel no distan mucho, resulta que en un producto ya se ve más la diferencia entre éstos, el ejemplo que tenemos a la mano es $\mathbb{Z}_n$. Para mostrar lo afirmado, recordemos que los filtros de Gabriel en $\mathbb{Z}_n$ son de la forma:

$$\mathcal{G}_{\mathscr{P}} = \left\{\langle \bar{i} \rangle : V(\langle \bar{i} \rangle) \cap \mathscr{P} = \emptyset\right\}, \text{ donde } \mathscr{P} \subseteq \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n).$$

En virtud del teorema fundamental de la aritmética existen $p_1, \ldots, p_r$ números primos únicos y existen $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ tales que $n = \prod_{j=1}^{r} p_j^{n_j}$. Si n es primo, entonces $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n) = \{0\}$, en consecuencia, los únicos filtros de Gabriel son $\{0, \mathbb{Z}_n\}$, $\{\mathbb{Z}_n\}$ que son los mismos para filtros de continuidad. Ahora, si n no es primo, entonces $r \geq 2$ y el ideal cero no es primo, de modo que $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n) = \{\langle \overline{p_1} \rangle, \ldots, \langle \overline{p_r} \rangle\}$, esto quiere decir que hay $2^{|\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n)|} = 2^r$ filtros de Gabriel, pues por cada subconjunto de $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n)$ le corresponde un filtro de Gabriel y hay $\prod_{j=1}^{r}(n_1 + 1)$ filtros de continuidad, obsérvese que $\prod_{j=1}^{r}(n_1 + 1) \geq 2^r$ y la igualdad solo se cumple si $n_1 = \cdots = n_r = 1$. por tanto, en general un filtro de continuidad no equivale a un filtro de Gabriel, pero en este caso un filtro lineal es lo mismo que un filtro de continuidad, es decir, coinciden en $\mathbb{Z}_n$, pero en general no tiene por que ser iguales, como lo muestra el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo 4.3.8.** *Es fácil verificar que $\zeta = \{2^n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$ es un filtro de continuidad en $\mathbb{Z}$. Por lo tanto $\zeta \times \zeta$ es un filtro de continuidad en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pero no es filtro lineal, ya que $\{0\} \times \{0\} \in \zeta \times \zeta$ y $\{0\} \times \{0\} \subseteq \{0\} \times 3\mathbb{Z}$, sin embargo $3\mathbb{Z} \notin \zeta$, por lo que $\{0\} \times 3\mathbb{Z} \notin \zeta \times \zeta$.*

4.4. Módulos de cocientes en filtros de continuidad

En esta sección, A denotará un anillo con unidad y ζ denotará un filtro de continuidad sobre A. Consideremos la siguiente relación en ζ

$$\leq \; \subseteq \zeta \times \zeta \qquad \text{dada por} \qquad I \leq J \iff J \subseteq I.$$

Claramente $\leq$ es un orden parcial en ζ, pues es el orden opuesto de la contención directa.

Proposición 4.4.1. *ζ es un copo dirigido.*

Dem.
Sea $I, J \in \zeta$. Dado que ζ es filtro de continuidad, se sigue que $I \cap J \in \zeta$ y como $I \cap J \subset I$, $I \cap J \subset J$, entonces

$$I \leq I \cap J \text{ y } J \leq I \cap J.$$

Por lo tanto, ζ es un COPO dirigido.

Q.E.D

Recordemos que cada ideal izquierdo I se puede considerar en A-**Mod**, de esta manera tenemos derecho de considerar el conjunto $\mathrm{Hom}_A(I, M) \in \mathbb{Z}$-**Mod**.

Ahora, para cada $I, J \in \zeta$ con $I \leq J$ consideremos la siguiente asignación:

$$\begin{aligned} \alpha_{IJ} : & \mathrm{Hom}_A(I, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(J, M) \text{ dada por} \\ & \alpha_{IJ}(g) = g \restriction_J, \text{ para cada } g \in \mathrm{Hom}_A(I, M) \end{aligned}$$

Proposición 4.4.2. $\big(\mathrm{Hom}_A(I, M), \alpha_{IJ}\big)$ *es un sistema directo.*

Dem.
(1) Sea $I \in \mathcal{G}$. Para cada $g \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$, tenemos $\alpha_{II}(g) = g \restriction_I = g$. Por lo tanto, $\alpha_{II} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(I,M)}$.

(2) Sean $I \leq J \leq K$. Para cada $g \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$ se tiene que

$$\alpha_{JK} \circ \alpha_{IJ}(g) = \alpha_{JK}\big(g \restriction_J\big) = \big(g \restriction_J\big) \restriction_K = g \restriction_{J \cap K} = g \restriction_K = \alpha_{IK}(g).$$

Se sigue que $\alpha_{JK} \circ \alpha_{IJ} = \alpha_{IK}$. Así, $\big(\mathrm{Hom}_A(I, M), \alpha_{IJ}\big)$ es un sistema directo en $\mathbb{Z}$-**Mod**.

Q.E.D

Corolario 4.4.3. $\varinjlim_{I \in \zeta} \mathrm{Hom}_A(I, M)$ *existe y es único.*

Denotaremos al límite directo del corolario anterior como $M_{(\zeta)}$, los elementos del límite directo $M_{(\zeta)}$ son de la forma $[(f, I)]$, donde $I \in \zeta$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$.

Observaciones 4.4.4. *Sean* $[(f, I)], [(g, J)] \in M_{(\zeta)}$.

(*a*) *Tenemos que:*

$$\begin{aligned} [(f, I)] = [(g, J)] & \iff (f, I) \sim (g, J) \iff \alpha_{IK}(f) = \alpha_{JK}(g) \quad \textit{para algún } K \in \zeta \textit{ con } I, J \leq K \\ & \iff \quad f \textit{ y } g \textit{ coinciden en algún } K \in \zeta \textit{ con } K \subseteq I \cap J. \end{aligned}$$

(*b*) *Si* $0 \in \zeta$, *entonces* $M_{(\zeta)} = 0$, *pues para todo* $I \in \zeta$ *y* $f \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$ *se cumple que* $f = 0$ *en el ideal izquierdo* 0, *es decir,* $[(f, I)] = [(0, A)]$ *(por el inciso previo de esta observación* (a)*).*

Hasta aquí, sabemos que $M_{(\zeta)} \in \mathbb{Z}$-**Mod**. Entonces, el siguiente paso es darle a $A_{(\zeta)}$ estructura de anillo y a $M_{(\zeta)}$ estructura de $A_{(\zeta)}$-módulo izquierdo. Y en virtud del inciso (b) de 4.4.4 a partir de aquí solo consideraremos filtros de continuidad que no tengan al ideal cero como elemento. Ya sabemos que tanto $A_{(\zeta)}$, como $M_{(\zeta)}$ son $\mathbb{Z}$-módulos cuya suma esta dada por:

$$[(f, I)] + [(g, J)] = [(\alpha_{IK}(f) + \alpha_{JK}(g), K)], \qquad \text{para } I, J \leq K.$$

Con el fin de obtener lo deseado, definamos la siguiente operación: $\bullet : A_{(\zeta)} \times M_{(\zeta)} \longrightarrow M_{(\zeta)}$ dada por $[(\lambda, I)] \bullet [(\xi, J)] = \big[(\xi \circ \lambda, \lambda^{-1}(J))\big]$, para todo $[(\lambda, I)] \in A_{(\zeta)}$ y $[(\xi, J)] \in M_{(\zeta)}$.

Representado en un diagrama es:

$$\begin{tikzcd} \lambda^{-1}(J) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[rr, bend right, "\xi\circ\lambda"'] & J \arrow[r, "\xi"] & M \end{tikzcd}$$

Proposición 4.4.5. $\bullet$ *es biaditiva.*

Dem.
(1) Veamos que $\bullet$ está bien definida. Para ello, sean $[(\lambda, I)] = [(\lambda', I')] \in A_{(\zeta)}$ y $[(\xi, J)] = [(\xi', J')] \in M_{(\zeta)}$.

Veamos que $\left[(\xi \circ \lambda, \lambda^{-1}(J))\right] = \left[\xi' \circ \lambda', \lambda'^{-1}(J')\right)]$. Como $[(\lambda, I)] = [(\lambda', I')]$, entonces existe $K \in \zeta$ con $K \subseteq I \cap I'$ tal que λ es igual a λ' en K. Similarmente, existe $L \in \zeta$ con $L \subseteq J \cap J'$ tal que ξ es igual a ξ' en L.

Las siguientes afirmaciones se cumplen trivialmente:

(*i*) $\lambda^{-1}(L) \subseteq \lambda^{-1}(J \cap J') \subseteq \lambda^{-1}(J) \subseteq I$.

(*ii*) $\lambda'^{-1}(L) \subseteq \lambda'^{-1}(J \cap J') \subseteq \lambda'^{-1}(J') \subseteq I'$.

Se sigue que $\lambda^{-1}(L) \cap \lambda'^{-1}(L) \subseteq I \cap I' \in \zeta$, por lo que $K' = K \cap \lambda^{-1}(L) \cap \lambda'^{-1}(L) \in \zeta$. En consecuencia, para cada $s \in K'$ se obtiene:

$$\xi \circ \lambda(s) = \xi\left(\lambda'(s)\right) = \xi'\left(\lambda'(s)\right) = \xi' \circ \lambda'(s).$$

Por lo tanto, $[(\xi_x \circ \lambda_a, \lambda_a^{-1}(J))] = [(\xi'_x \circ \lambda'_a, \lambda_a'^{-1}(J'))]$, es decir, $\bullet$ está bien definida.

(2) Ahora, veamos que $\bullet$ es biaditiva. Sean $[(\lambda, I)], [(\lambda', I')] \in A_{(\zeta)}$ y $[(\xi, J)], [(\xi', J')] \in M_{(\zeta)}$. Tomemos $K = \lambda^{-1}(J) \cap \lambda'^{-1}(J) \in \zeta$, para cada $a \in K$ tenemos

$$\lambda(a), \lambda'(a) \in J \Longrightarrow \left(\lambda \restriction_K + \lambda' \restriction_K\right)(a) \in J \Longrightarrow a \in \left(\lambda \restriction_K + \lambda' \restriction_K\right)^{-1}(J),$$

es decir,

$$K \subseteq \left(\lambda \restriction_K + \lambda' \restriction_K\right)^{-1}(J). \tag{i}$$

(*a*) Por (*i*), tenemos que

$$\begin{aligned}
[(\lambda, I)] \bullet (\xi, J)] + [(\lambda', I')] \bullet (\xi, J)] &= \left[(\xi \circ \lambda, \lambda^{-1}(J))\right] + \left[(\xi \circ \lambda', \lambda'^{-1}(J))\right] \\
&= [\xi \circ \lambda \restriction_K + \xi \circ \lambda' \restriction_K, K] \\
&= [(\xi \circ \left(\lambda \restriction_K + \lambda' \restriction_K\right), K)] \\
&= \left[\left(\xi \circ \left(\lambda \restriction_K + \lambda' \restriction_K\right), \left(\lambda \restriction_K + \lambda' \restriction_K\right)^{-1}(J)\right)\right] \\
&= [(\lambda \restriction_K + \lambda' \restriction_K, K)] \bullet [(\xi, J)] \\
&= ([(\lambda, I)] + [(\lambda', I')]) \bullet [(\xi, J)].
\end{aligned}$$

Por tanto, $\bullet$ se distribuye por la derecha.

(b) Sea $K = J \cap J' \in \zeta$.

$$\begin{aligned}
[(\lambda, I)] \bullet ([(\xi, J)] + [(\xi', J')]) &= [(\lambda, I)] \bullet [(\xi \restriction_K + \xi' \restriction_K, K)] \\
&= \left[\left(\xi \restriction_K \circ \lambda + \xi' \restriction_K \circ \lambda, \lambda^{-1}(K)\right)\right] \\
&= \left[\left(\xi \restriction_K \circ \lambda, \lambda^{-1}(K)\right)\right] + \left[\left(\xi' \restriction_K \circ \lambda, \lambda^{-1}(K)\right)\right] \\
&= [(\lambda, I)] \bullet [(\xi \restriction_K, K)] + [(\lambda, I)] \bullet [(\xi' \restriction_K, K)] \\
&= [(\lambda, I)] \bullet [(\xi, J)] + [(\lambda, I)] \bullet [(\xi', J')].
\end{aligned}$$

De (1) y (2) se concluye que $\bullet$ es biaditiva.

Q.E.D

Corolario 4.4.6. $(A_{(\zeta)}, +, \bullet)$ *es un anillo y* $(M_{(\zeta)}, +, \bullet)$ *es un* $A_{(\zeta)}$*-módulo.*

Dem.
Nos resta demostrar lo siguiente:

(*i*) Si $[(\lambda, I)], [(\lambda', I')] \in A_{(\zeta)}$ y $[(\xi, J)] \in M_{(\zeta)}$, entonces

$$[(\lambda, I)] \bullet ([(\lambda', I')] \bullet [(\xi, J)]) = ([(\lambda, I)] \bullet [(\lambda', I')]) \bullet [(\xi, J)].$$

Mostremos la veracidad de lo afirmado:

$$\begin{aligned}([(\lambda, I)] \bullet [(\lambda', I')]) \bullet [(\xi, J)] &= \left[\left(\lambda' \circ \lambda \restriction_{\lambda^{-1}(I')}, \lambda^{-1}(I')\right)\right] \bullet [(\xi, J)] = \\ &= \left[\left(\xi \circ \left(\lambda' \circ \lambda_{\lambda^{-1}(I')}\right) \restriction_{\left(\lambda' \circ \lambda \restriction_{\lambda^{-1}(I')}\right)^{-1}(J)}, \left(\lambda' \circ \lambda \restriction_{\lambda^{-1}(I')}\right)^{-1}(J)\right)\right].\end{aligned}$$

Como $\left(\lambda' \circ \lambda \restriction_{\lambda^{-1}(I')}\right)^{-1}(J) = \lambda \restriction^{-1}_{\lambda^{-1}(I')} \left(\lambda'^{-1}(J)\right)$, entonces

$$\begin{aligned}([(\lambda, I)] \bullet [(\lambda', I')]) \bullet [(\xi, J)] &= \left[\left(\lambda \restriction_{\lambda^{-1}(I')}, \lambda^{-1}(I')\right)\right] \bullet \left[\left(\xi \circ \lambda', \lambda'^{-1}(J)\right)\right] \\ &= [(\lambda, I)] \bullet ([(\lambda', I')] \bullet [(\xi, J)]).\end{aligned}$$

(*ii*) $[(\mathrm{id}_A, A)]$ es la identidad en $A_{(\zeta)}$.

Mostremos la veracidad de lo dicho. Sea $[(\lambda, I)] \in A_{(\zeta)}$.

$$[(\mathrm{id}_A, A)] \bullet [(\lambda, I)] = [(\lambda \circ \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A^{-1}(I))] = [(\lambda, I)] = \left[\left(\mathrm{id}_A \circ \lambda, \lambda^{-1}(A)\right)\right] = [(\lambda, I)] \bullet [(\mathrm{id}_A, A)].$$

Esto prueba lo deseado.

(*iii*) Sea $[(\xi, J)] \in M_{(\zeta)}$.

$$[(\mathrm{id}_A, A)] \bullet [(\xi, J)] = \left[\left(\xi \circ \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A^{-1}(J)\right)\right] = [(\xi, J)].$$

De (*i*), (*ii*) y (*iii*) se concluye lo deseado.

Q.E.D

Definición 4.4.7. *Sea A un anillo y ζ un filtro de continuidad de A. Para cada $M \in A$-* ***Mod****, su* ***módulo de cocientes sobre*** *ζ es el módulo $M_{(\zeta)}$.*

Recordemos que para cada $m \in M$, $f_m : A \longrightarrow M$ dada por $f_m(a) = am$ es A-homomorfismo. Más aún, el morfismo $\Phi : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A, M)$ dado por $\Phi(m) = f_m$ es un isomorfismo (de grupos conmutativos).

Ahora, consideremos la siguiente función: $\varphi_M : M \longrightarrow M_{(\zeta)}$ dada por $\varphi_M(m) = [(f_m, A)]$.

Proposición 4.4.8. *φ_M es un homomorfismo de grupos, y si $M = A$, entonces φ_A es un homomorfismo de anillos.*

Dem.
Sean $m_1, m_2 \in M$.

$$\begin{aligned}\varphi_M(m_1 + m_2) &= [(f_{m_1+m_2}, A)] = [(f_{m_1} + f_{m_2}, A)] = [(\alpha_{AA}(f_{m_1}) + \alpha_{AA}(f_{m_2}), A)] \\ &= [(f_{m_1}, A)] + [(f_{m_2}, A)] = \varphi_M(m_1) + \varphi_M(m_2).\end{aligned}$$

Por tanto, φ_M es homomorfismo de grupos (conmutativos).

Ahora, supongamos que $M = A$ y sean $a, b \in A$. Tenemos:

$$\varphi_A(ab) = [(f_{ab}, A)] = [(f_b \circ f_a, A)] = [(f_b \circ f_a, f_a^{-1}(A))] = [(f_a, A)] \bullet [(f_b, A)] = \varphi_A(a) \bullet \varphi_A(b).$$

Q.E.D

De la proposición previa se sigue que a $M_{(\zeta)}$ le podemos dar estructura de A-módulo, cuyo producto por escalar $\cdot : A \times M_{(\zeta)} \longrightarrow M_{(\zeta)}$ esta dado por $a \cdot [(f, I)] = \varphi_A(a) \bullet [(f, I)]$.

Corolario 4.4.9. *φ_M es A-homomorfismo*

Dem.
Sean $a \in A$, $m, n \in M$.

$$\begin{aligned}\varphi_M(m + an) &= [(f_{m+an}, A)] = [(f_m + f_{an}, A)] = [(f_m, A)] + [(f_{an}, A)]\\ &= \varphi_M(m) + [(f_n \circ f_a, A)] = \varphi_M(m) + [(f_n \circ f_a, f_a^{-1}(A))]\\ &= \varphi_M(m) + [(f_a, A)] \bullet [(f_n, A)] = \varphi_M(m) + a \cdot [(f_n, A)]\\ &= \varphi_M(m) + a \cdot \varphi_M(n).\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ_M es A-homomorfismo.

Q.E.D

Ahora, consideremos la siguiente asignación: $F_\zeta : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A_{(\zeta)}\text{-}\mathbf{Mod}$ dada por

- Para cada $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$, $F_\zeta(M) = M_{(\zeta)}$.
- Para cada $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, $F_\zeta(f) = f_{(\zeta)}$, donde

$$\begin{aligned}f_{(\zeta)} : M_{(\zeta)} \longrightarrow N_{(\zeta)} \quad &\text{está dada por}\\ f_{(\zeta)}([(\varphi, I)]) = [(f \circ \varphi, I)] \quad &\text{para cada } [(\varphi, I)] \in M_{(\zeta)}.\end{aligned}$$

Ahora, veamos que si $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, entonces $f_{(\zeta)}$ está bien definido. Para ello, supongamos que $[(\varphi, I)] = [(\phi, J)]$, entonces existen $K \in \zeta$ con $I, J \leq K$ tal que $\varphi \restriction_K = \phi \restriction_K$.

Así, $f \circ \Big(\varphi \restriction_K\Big) = f \circ \Big(\phi \restriction_K\Big)$, se sigue que $\big(f \circ \varphi\big) \restriction_K = \big(f \circ \phi\big) \restriction_K$. Por lo tanto, $f_{(\zeta)}$ está bien definida.

Proposición 4.4.10. *F_ζ es un funtor covariante.*

Dem.
(1) Por definición, para cada $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$, $F_\zeta(M) \in A_{(\zeta)}\text{-}\mathbf{Mod}$.

(2) Sean $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ y $g \in \mathrm{Hom}_A(N, K)$. Para cada $[(\varphi, I)] \in M_{(\zeta)}$, tenemos:

- $$\begin{aligned}F_\zeta(g \circ f)([(\varphi, I)]) &= (g \circ f)_{(\zeta)}([\varphi, I]) = [((g \circ f) \circ \varphi, I)] = [(g \circ (f \circ \varphi), I)]\\ &= g_{(\zeta)}([(f \circ \varphi, I)]) = g_{(\zeta)} \circ f_{(\zeta)}([(\varphi, I)]) = F_\zeta(g) \circ F_\zeta(f)([(\varphi, I)]).\end{aligned}$$

  Por lo tanto, $\quad F_\zeta(g \circ f) = F_\zeta(g) \circ F_\zeta(f)$.

- $F_\zeta(\mathrm{id}_M)([(\varphi, I)]) = [(\mathrm{id}_M \circ \varphi, I)] = [(\varphi, I)] = \mathrm{id}_{M_{(\zeta)}}([(\varphi, I)])$.

  Por lo tanto, $\quad F_\zeta(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{M_{(\zeta)}}$.

De (1), (2) se sigue que F_ζ es un funtor covariante.

Q.E.D

Proposición 4.4.11. *F_ζ es exacto izquierdo.*

Dem.
Sabemos que $\mathrm{Hom}_A(I, \_)$ es exacto izquierdo y $\varinjlim(\_)$ es exacto, se sigue que F_ζ es exacto izquierdo.

Q.E.D

Sea $F'_\zeta : A_{(\zeta)}$-**Mod** $\longrightarrow A$-**Mod** el funtor olvidadizo que manda cada $A_{(\zeta)}$-módulo a sí mismo pero considerado con la estructura de A-módulo. Tomemos $L_\zeta = F'_\zeta \circ F_\zeta$.

Proposición 4.4.12. *La clase* $\{\varphi_M\}_{M\in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})}$ *conforma una transformación natural* $\varphi : \mathrm{id}_{A\text{-}\boldsymbol{Mod}} \longrightarrow L_\zeta$.

Dem.
Sea $g : M \longrightarrow N$ en A-**Mod**. Entonces, para cada $m \in M$, tenemos:

- $\varphi_N \circ g(m) = \varphi_N(g(m)) = [(f_{g(m)}, A)]$.
- $g_{(\zeta)} \circ \varphi_M(m) = g_{(\zeta)}([(f_m, A)]) = [(g \circ f_m, A)]$.

Ahora, para cada $a \in A$, $g \circ f_m(a) = g(am) = ag(m) = f_{g(m)}(a)$, se sigue que $g \circ f_m = f_{g(m)}$.

Por lo tanto, $g_{(\zeta)} \circ \varphi_M(m) = \varphi_N \circ g(m)$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_M"'] & N \arrow[d, "\varphi_N"] \\ M_{(\zeta)} \arrow[r, "g_{(\zeta)}"'] & N_{(\zeta)} \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, φ es una transformación natural.

Q.E.D

Si consideramos dos filtros de continuidad ζ_1, ζ_2 de A tales que $\zeta_1 \subseteq \zeta_2$ y para $M \in A$-**Mod** consideremos la siguiente operación: $\eta^{1,2}_M : M_{(\zeta_1)} \longrightarrow M_{(\zeta_2)}$ dada por $\eta^{1,2}_M([(f, I)]_1) = [(f, I)]_2$.

Proposición 4.4.13. *Para* $M \in A$-***Mod****,* $\eta^{1,2}_M$ *es un* A*-homomorfismo.*

Dem.
$\eta^{1,2}_M$ es una función, porque si $[(f, I)]_1 = [(g, J)]_1 \in M_{(\zeta_1)}$, entonces existe $K \in \zeta_1 \subseteq \zeta_2$ tal que $f = g$ en K. por lo tanto, $[(f, I)]_2 = [(g, J)]_2$ en $M_{(\zeta_2)}$. Ahora, veamos que $\eta^{1,2}_M$ es un A-homomorfismo; para ello, sean $[(f, I)]_1, [(g, J)]_1 \in M_{(\zeta_1)}$ y $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned} \eta^{1,2}_M([(f, I)]_1 + a[(g, J)]_1) &= \eta^{1,2}_M([(f, I)]_1 + [(f_a, A)]_1 [(g, J)]_1) = \eta^{1,2}_M\left([(f, I)]_1 + \left[\left(g \circ f_a, f_a^{-1}(J)\right)\right]_1\right) \\ &= \eta^{1,2}_M([(f \restriction_K, g \circ f_a \restriction_K, K)]_1), \text{ p. a. } K \in \zeta_1 \subseteq \zeta_2 \text{ tal que} K \subseteq I \cap f_a^{-1}(J) \\ &= [(f \restriction_K, g \circ f_a \restriction_K, K)]_2 = [(f, I)]_2 + a[(g, J)]_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\eta^{1,2}_M$ es un A-homomorfismo.

Q.E.D

De hecho, la proposición 4.4.13 nos dice de manera casi inmediata que tenemos una transformación natural entre los funtores correspondientes L_1 y L_2, como se describe abajo.

Proposición 4.4.14. *Sean* ζ_1, ζ_2 *filtros de continuidad tales que* $\zeta_1 \subseteq \zeta_2$ *y sean* $F_1 : A$-***Mod*** $\longrightarrow A_{(\zeta_1)}$-***Mod*** *y* $F_2 : A$-***Mod*** $\longrightarrow A_{(\zeta_2)}$-***Mod*** *los funtores dados por* $F_1 : M \mapsto M_{(\zeta_1)}$ *y* $F_2 : M \mapsto M_{(\zeta_2)}$*. Sean* F'_1 *y* F'_2 *los funtores olvidadizos, respectivamente, y* $L_1 = F'_1 \circ F_1$*,* $L_2 = F'_2 \circ F_2$*. Entonces,* $\left\{\eta^{1,2}_M : M \in A\text{-}\boldsymbol{Mod}\right\}$ *conforma una transformación natural* $\eta^{1,2} : L_1 \longrightarrow L_2$*, tal que si* φ_1 *y* φ_2 *son las transformaciones naturales correspondientes presentadas en la proposición 4.4.12, entonces* $\eta^{1,2} \circ \varphi_1 = \varphi_2$.

Dem.
Sea $g : M \longrightarrow N$ un A-homomorfismo. Ya que para todo $[(h,K)]_1 \in M_{(\zeta_1)}$ tenemos que

$$g_{(\zeta_2)} \circ \zeta_M^{1,2}([(h,K)]_1) = g_{(\zeta_2)}([(h,K)]_2) = [(g \circ h, K)]_2 = \eta_N^{1,2}([(f \circ h, K)]_1) = \eta_N^{1,2} \circ g_{(\zeta_1)}([(h,k)]_1).$$

Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M_{(\zeta_1)} \arrow[r, "\eta_M^{1,2}"] \arrow[d, "g_{(\zeta_1)}"'] & M_{(\zeta_2)} \arrow[d, "g_{(\zeta_2)}"] \\ N_{(\zeta_1)} \arrow[r, "\eta_N^{1,2}"'] & = N_{(\zeta_2)} \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\eta^{1,2}$ es una transformación natural. Por definición es claro que $\eta^{1,2} \circ \varphi_1 = \varphi_2$.

Q.E.D

Ahora, para cada filtro de continuidad ζ existe un prerradical asociado r_ζ, el cual es definido como:

$$r_\zeta(M) = \mathrm{Nu}(\varphi_M^\zeta) = \{m \in M : \text{ existe } I \in \zeta \text{ tal que } Im = 0\}, \text{ con } M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod}).$$

En otras palabras, $r_\zeta = \mathrm{Nu}(\varphi^\zeta)$, donde $\varphi^\zeta : \mathrm{id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}} \longrightarrow L_\zeta$ es la transformación natural asociada a ζ como en la proposición 4.4.12, veamos que efectivamente $r_\zeta \in A\text{-}\mathrm{pr}$.

Observación 4.4.15. $M \in \mathbb{T}_{r_\zeta} \iff$ *Para todo* $m \in M$, *existe* $Km \in \zeta$ *tal que* $Km \subseteq \mathrm{ann}(m)$.

Proposición 4.4.16. $r_\zeta \in A$-pr *y para cada* $M \in A$-***Mod*** *y todo* $N \leq M$ *se tiene que* $r_\zeta(N) = N \cap r_\zeta(M)$.

Dem.
(1) Veamos primero que $r_\zeta \in A$-pr, para ello, sean $M, N \in A$-**Mod** y $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$.

- Claramente $r_\zeta(M) \leq M$.
- Sea $m \in r_\zeta(M)$, existe $I_m \in \zeta$ tal que $I_m m = 0$, así, para todo $a \in I_m, af(m) = f(am) = f(0) = 0$, esto implica que $I_m f(m) = 0$, es decir, $f(m) \in r_\zeta(N)$. Por lo tanto, $f(r_\zeta(M)) \leq r_\zeta(N)$

(2) Sea $M, N \in A$-**Mod** con $N \leq M$, veamos que $r_\zeta(N) = N \cap r_\zeta(M)$.

($\subseteq$) Si $n \in r_\zeta(N)$, existe $I \in \zeta$ tal que $In = 0$, esto implica que $n \in r_\zeta(M)$, pues $N \leq M$. Por lo tanto, $r_\zeta(N) \subseteq N \cap r_\zeta(M)$.

($\supseteq$) Si $n \in N \cap r_\zeta(M)$, entonces $n \in N$ y $n \in r_\zeta(M)$, implica que existe $J \in \zeta$ tal que $Jn = 0$, $n \in N$, Se sigue que $n \in r_\zeta(N)$. Por lo tanto, $r_\zeta(N) \supseteq N \cap r_\zeta(M)$. Se concluye que $r_\zeta(N) = N \cap r_\zeta(M)$.

Q.E.D

Corolario 4.4.17. r_ζ *es exacto izquierdo, idempotente y* $\mathbb{T}_{r_\zeta}$ *es cerrado bajo monomorfismos.*

Los siguientes dos resultados son presentados en [10, Chapter IX, Lemma 1.3, Lemma 1.4]

Proposición 4.4.18. *Sea* $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$. *Si* $x = [(\xi, I)] \in M_{(\zeta)}$, *entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\iota_I"] \arrow[d, "\xi"'] & A \arrow[d, "\beta_x"] \\ M \arrow[r, "\varphi_M"'] & M_{(\zeta)} \end{tikzcd}$$

donde $\beta_x(a) = ax$ *para cada* $a \in A$.

Dem.
Sea $a \in I$, tenemos que;

(1) $\varphi \circ \xi\,(a) = \big[(f_{\xi(a)}, A)\big]$,

(2) $\beta_x \circ \iota_I(a) = \beta_x(a) = \varphi_A(a)x = [(f_a, A)]\,[(\xi, I)] = \big[(\xi \circ f_a, f_a^{-1}(I))\big]$.

Ahora, $I \in \zeta$ y $f_a^{-1}(I) \in \zeta$, entonces $I \cap f_a^{-1}(I) \in \zeta$. Así que para todo $b \in I \cap f_a^{-1}(I)$,

$$(\xi \circ f_a)\,(b) = \xi(ba) = b\xi(a) = f_{\xi(a)}(b).$$

Entonces, $\big[(f_{\xi(a),A})\big] = \big[\xi \circ f_a, f_a^{-1}(I)\big]$. Por lo tanto, $\varphi_M \circ \xi = \beta_x \circ \iota_I$.

Q.E.D

Recordemos que cada prerradical r, denotamos como $\mathbb{T}_r$ a la clase de todos los A-módulos tal que $r(M) = M$, y esta es una clase que es cerrada bajo sumas directas y epimorfismos. Ya que r_ζ es exacto izquierdo, por tanto idempotente, entonces $\mathbb{T}_{r_\zeta}$ es también cerrado bajo monomorfismos.

Proposición 4.4.19. *Sea $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ y $\varphi = \varphi^\zeta$ la transformación natural asociado a ζ. Entonces, $M_{(\zeta)}/\operatorname{Im}(\varphi_M) \in \mathbb{T}_r$.*

Dem.
Sea $\overline{m} = [(\xi, I)] + \operatorname{Im}(\varphi_M) \in M_{(\zeta)}$. Tenemos que

$$\operatorname{ann}(\overline{m}) = \{a \in R : a\,[(\xi, I)] \in \operatorname{Im}(\varphi_M)\}\,.$$

Por la proposición 4.4.18 $a\,[(\xi, I)] = \big[\big(f_{\xi(a)}, A\big)\big]$, entonces para todo $a \in I$, $a\,[(\xi, I)] \in \operatorname{Im}(\varphi_M)$. Así, $I \subseteq \operatorname{ann}(\overline{m})$. Por la observación 4.4.15, $M_{(\zeta)}/\operatorname{Im}(\varphi_M) \in \mathbb{T}_r$.

Q.E.D

Siendo r_ζ un prerradical exacto izquierdo, su correspondiente filtro lineal asociado es:

$$\mathcal{L}_{r_\zeta} = \big\{I \in \mathcal{I}(A) : A/I \in \mathbb{T}_{r_\zeta}\big\}.$$

Proposición 4.4.20. *$\mathcal{L}_{r_\zeta}$ es el filtro lineal menor que contiene a ζ. En otras palabras, $\mathcal{L}_{r_\zeta} = \mathcal{L}(\zeta)$, en concordancia con la notación de la Proposición 4.1.10*

Dem.
Veamos primero que $\zeta \subseteq \mathcal{L}_{r_\zeta}$, para ellos describamos de manera más explícitamente $\mathcal{L}_{r_\zeta}$. Como:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_r &= \{M \in A\text{-}\mathbf{Mod} \mid r(M) = M\} = \{M \in A\text{-}\mathbf{Mod} \mid \operatorname{Nu}(\varphi_M) = M\}\\ &= \{M \in A\text{-}\mathbf{Mod} \mid \text{ para todo } m \in M,\ [(f_m, A)] = [(0, A)]\}\\ &= \{M \in A\text{-}\mathbf{Mod} \mid \text{ para todo } m \in M,\ \text{ existe } J_m \in \zeta \text{ tal que } J_m m = 0\}\\ &= \{M \in A\text{-}\mathbf{Mod} \mid \text{ para todo } m \in M,\ \text{ existe } J_m \in \zeta \text{ tal que } J_m \subseteq \operatorname{ann}(m)\}\,.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{r_\zeta} &= \{I \in \mathcal{I}(A) \mid \text{ para todo } a \in A,\ \text{ existe } J_a \in \zeta \text{ tal que } J_a(a + I) = I\}\\ &= \{I \in \mathcal{I}(A) \mid \text{ para todo } a \in A,\ \text{ existe } J_a \in \zeta \text{ tal que } J_a \subseteq (I : a)\}\,.\end{aligned}$$

Ahora, por el teorema 4.1.2 inciso (ii) se tiene que para cada $J \in \zeta$ y $a \in A$, $(J : a) \in \zeta$, esto es, $\zeta \subseteq \mathcal{L}_{r_\zeta}$. Por último, mostremos que $\mathcal{L}_{r_\zeta}$ es mínimo con esa propiedad; para ello, sea $\mathcal{L}$ el filtro lineal más pequeño que contiene a ζ, esto es, si $\mathcal{L}'$ es filtro lineal tal que $\zeta \subseteq \mathcal{L}'$, entonces $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$. En particular, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{r_\zeta}$, para mostrar la otra contención consideremos $I \in \mathcal{L}_{r_\zeta}$, se sigue que para todo $a \in A$, existe $J_a \in \zeta$ tal que $J_a \subseteq (I : a)$, en particular, para $a = 1$ existe $J_1 \in \zeta$ tal que $J_1 \subseteq (I : 1) = I$. Dado que $\zeta \subseteq \mathcal{L}$, entonces $J_1 \in \mathcal{L}$, en consecuencia, $I \in \mathcal{L}$. Por lo tanto, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{r_\zeta}$, es decir, $\mathcal{L}_{r_\zeta}$ es el filtro lineal más pequeño que contiene a ζ.

Q.E.D

Note que un filtro de continuidad ζ es un filtro lineal si y solo si $\zeta = \mathcal{L}_{r_\zeta}$. Este es el caso de los filtros de continuidad en anillos principales especiales (ver Lema 4.3.4).

Proposición 4.4.21. *Sean $A_1, \ldots, A_r$ anillos con unidad y $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ filtros de continuidad en $A_1, \ldots, A_r$ respectivamente. Si $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ son filtros lineales, entonces $\mathcal{L} = \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_r$ también es filtro lineal en $A = A_1 \times \cdots \times A_r$.*

Dem.
Ya sabemos que $\mathcal{L}$ es filtro de continuidad en A, entonces para ver que es filtro lineal nos resta mostrar que si $I = I_1 \times \cdots \times I_r \in \mathcal{L}$ y $J = J_1 \times \cdots \times J_r \in \mathcal{I}(A)$ tal que $I \subseteq J$, entonces $J \in \mathcal{L}$. Pero $I \subseteq J$ significa que $I_k \subseteq J_k$, pero como cada ζ_k es filtro lineal y $I_k \in \zeta_k$, entonces $J_k \in \zeta_k$, se sigue inmediatamente que $J \in \mathcal{L}$, es decir, $\mathcal{L}$ es filtro lineal.

Q.E.D

Esto nos dice que el producto directo de filtros de continuidad en **AIP**'s especiales son lineales, y además con elemento mínimo. En particular, los filtros de continuidad en $\mathbb{Z}_n$ son lineales con elemento mínimo.

4.5. Filtros de continuidad con elemento menor

Claramente en $\mathbb{Z}_n$ los filtros de continuidad ζ tienen la particularidad que $\cap\zeta \in \zeta$, e.d., ζ tiene elemento mínimo. En general, podemos describir los módulos de cocientes sobre filtros de continuidad con elemento mínimo.

Proposición 4.5.1. *Para cada anillo A, sea ζ un filtro de continuidad de A tal que $\cap\zeta \in \zeta$. Entonces, $\cap\zeta$ es un ideal de A.*

Dem.
Sabemos que $\cap\zeta \in \mathcal{I}(A)$. Veamos que entonces $\cap\zeta$ es un ideal derecho; para ello, consideremos $a \in A$ y $h_a : A \longrightarrow A$ dada por $h_a(x) = xa$, para todo $x \in A$, que claramente es un A-homomorfismo, entonces $h_a^{-1}(\cap\zeta) \in \zeta$, de modo que $\cap\zeta \subseteq h_a^{-1}(\cap\zeta)$

$$\Longrightarrow \cap\zeta a = h_a(\cap\zeta) \subseteq h_a\left(h_a^{-1}(\cap\zeta)\right) = \cap\zeta.$$

Por lo tanto, $\cap\zeta$ es ideal bilateral.

Q.E.D

Como consecuencia, $\cap\zeta$ es un (A, A)-bimódulo. Por lo tanto, podemos considerar el producto tensorial $T_n = \bigotimes_{i=1}^n \cap\zeta$, el cual es un (A, A)-bimódulo. Podemos usar este bimódulo para describir como A-módulos a los módulos iterados de cocientes en filtros de continuidad con elemento mínimo.

Para cada filtro de continuidad ζ y $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ el A-módulo $M_{(n)}$ como sigue:

- $M_{(1)} := M_{(\zeta)}$, si $n = 1$
- $M_{(n)} := \left[M_{(n-1)}\right]_{(\zeta)}$, si $n > 1$.

Proposición 4.5.2. *Sea A un anillo y ζ un filtro de continuidad de A con $\bigcap\zeta \in \zeta$. Entonces, para $n \in \mathbb{N}$ y $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$, tenemos que $M_{(n)} \cong \mathrm{Hom}_A(T_n, M) \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$.*

Dem.
Sea $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$, $I \in \zeta$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$, como $\bigcap \zeta \in \zeta$, entonces $\left[\left(f \restriction_{\bigcap \zeta}, \cap\zeta\right)\right] = [(f, I)]$ en $M_{(\zeta)}$.

Ya que por la Proposición 4.5.1 sabemos que $\cap\zeta$ es (A, A)-bimódulo, entonces $\mathrm{Hom}_A(\cap\zeta, M)$ tiene una estructura de A-módulo izquierdo, así

$$M_{(1)} = M_{(\zeta)} = \{[(f, \cap\zeta)] : f \in \mathrm{Hom}_A(\cap\zeta, M)\} \cong \mathrm{Hom}_A(\cap\zeta, M) = \mathrm{Hom}_A(T_1, M).$$

Ahora supongamos que el isomorfismo existe para $n-1$. Entonces:

$$M_{(n)} = \left[M_{(n-1)}\right]_{(\zeta)} \cong \mathrm{Hom}_A(T_{n-1}, M)_{(\zeta)} \cong \mathrm{Hom}_A(T_1, \mathrm{Hom}_A(T_{n-1}, M)) \cong \mathrm{Hom}_A(T_n, M).$$

En virtud del principio de inducción matemática se obtiene lo que se desea.

Q.E.D

En particular podemos observar dos cosas, la primera es que todo filtro de continuidad ζ en $\mathbb{Z}_n$ cumple con la proposición 4.5.2, es decir, en $\mathbb{Z}_n$ podemos describir los módulos iterados de cocientes sobre cualquiera de sus filtros de continuidad mediante su elemento mínimo y la segunda es que tenemos que para cada $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ su módulo de cociente sobre un filtro de continuidad ζ con elemento mínimo es descrito como $M_{(\zeta)} = \mathrm{Hom}_A(\cap\zeta, M)$. Por lo tanto, en este caso, hablaremos de módulos de cocientes que conmutan con productos.

Corolario 4.5.3. *Para cada anillo A, sea ζ un filtro de continuidad de A con elemento mínimo $\cap\zeta$. Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ una familia de A-módulos izquierdos. Entonces:*

$$\left(\prod_{\lambda\in\Delta} M_\lambda\right)_{(\zeta)} = \prod_{\lambda\in\Delta} (M_\lambda)_{(\zeta)}.$$

Dem.
Como ζ tiene elemento mínimo, entonces:

$$\left(\prod_{\lambda\in\Delta} M_\lambda\right)_{(\zeta)} \cong \mathrm{Hom}_A\left(\cap\zeta, \prod_{\lambda\in\Delta} M_\lambda\right) \cong \prod_{\lambda\in\Delta} \mathrm{Hom}_A(\cap\zeta, M_\lambda) \cong \prod_{\lambda\in\Delta} (M_\lambda)_{(\zeta)}.$$

Q.E.D

Note que si ζ es un filtro de continuidad con elemento mínimo y $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$, entonces $\mathrm{Nu}(\varphi_M) = \{m \in M : (\cap\zeta)\, m = 0\}$. En particular, podemos describir los anillos cocientes sobre cada filtro de continuidad de un **AIP especial**. Recordemos que estos filtros de continuidad están completamente descritos en el Lema 4.3.4.

Proposición 4.5.4. *Sea A un anillo local uniserial de longitud de composición n, e.d., $J^{n-1} \neq 0$ y $J^n = 0$, donde $J = \langle a\rangle$ es su ideal máximo. Sea $\zeta = \left\{J^j\right\}_{j=0}^{k}$ filtro de continuidad de A, con $0 \leq k \leq n$. Entonces $A_{(\zeta)} \cong A/J^{n-k}$.*

Dem.
Afirmamos que el isomorfismo es justo $\varphi_A : A \longrightarrow A_{(\zeta)}$ dado por $\varphi_A(a) = [(f_a, A)]$, para todo $a \in A$. Mostremos que φ_A es sobre: sea $[(f, J^k)] \in A_{(\zeta)}$. Ya que A es local uniserial, es injectivo como A-módulo, así que existe $g : A \longrightarrow A$ tal que $f = g$ en J^k. Por lo tanto, $\varphi_a(g(1)) = \left[f_{g(1)}, A\right] = [(g, A)] = [(f, J^k)]$, esto muestra que φ, es sobreyectiva. Por el primer teorema de isomorfismo se sigue que $A/\mathrm{Nu}(\varphi_A) \cong A_{(\zeta)}$. Finalmente veamos que $J^{n-k} = \mathrm{Nu}(\varphi_A)$; sabemos que $\mathrm{Nu}(\varphi_A) \in \mathcal{I}(A)$, es decir, $\mathrm{Nu}(\varphi_A) = J^l = \left\langle a^l\right\rangle$ para algún $l \in \{0, 1 \ldots, n\}$. Entonces, $a^{k+l} = a^k a^l = 0$. Ahora, para cada $xa^{n-k} \in J^{n-k}$, tenemos que $a^k\left(xa^{n-k}\right) = 0$, y recordando que los ideales en A son bilaterales, se sigue que existe $y \in A$ tale que $a^k x = ya^k$, así $a^k\left(xa^{n-k}\right) = ya^k a^{n-k} = ya^n = 0$. Por lo tanto, $J^{n-k} \subseteq \mathrm{Nu}(\varphi_A) = J^l$, es decir, $l \leq n-k$. Ahora, si $l < n-k$, entonces $l + k < n$, es decir, $a^{l+k} \neq 0$, lo cual no es posible, pues $a^{l+k} = 0$. En consecuencia, $J^{n-k} = \mathrm{Nu}(\varphi_A)$.

Q.E.D

De hecho, cuando consideramos filtros de continuidad con un elemento mínimo sobre cualquier anillo auto inyectivo, el módulo de cocientes de cualquier ideal también es un ideal. Primero recordamos un lema útil sobre módulos cuasi-inyectivos. Para más información ver [2], Chapter 5, Sections 16 and 17.

Lema 4.5.5. *Sea A un anillo y $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ cuasi-inyectivo. Sea $K \leq N \leq M$. Si K es un submódulo totalmente invariante (t.i) de M, entonces es un submódulo totalmente invariante de N.*

Dem.
Sea $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ cuasi-inyectivo y supongamos que $K \leq_{t.i} M$. Sea $f \in \mathrm{Hom}_A(N, N)$. Dado que M es cuasi-inyectivo, entonces existe $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_A(M, M)$ que extiende a f. Por lo tanto, $f(K) = \overline{f}(K) \leq K$.

Q.E.D

Proposición 4.5.6. *Sea A un anillo auto inyectivo y ζ un filtro de continuidad en A con elemento mínimo $K = \cap\zeta$. Si L es un ideal de A, entonces $L_{(\zeta)}$ es isomorfo a un ideal de $A_{(\zeta)}$.*

Dem.
Ya que F_ζ es un funtor exacto izquierdo (ver la Proposición 4.4.11), entonces $F_\zeta(\iota) : L_{(\zeta)} \to R_{(\zeta)}$, el cual esta dado por $[(f, K)] \mapsto [(\iota \circ f, K)]$, es un monomorfismo de $R_{(\zeta)}$-módulos, donde $\iota : L \hookrightarrow R$ es la inclusión. Por lo tanto, $W = F_{(\zeta)}(\iota)\left(L_{(\zeta)}\right) \cong L_{(\zeta)}$ es un ideal izquierdo de $R_{(\zeta)}$. Veamos que W es también un ideal derecho. Sea $[(\lambda, K)] \in R_{(\zeta)}$ y $[(g, K)] \in W$, existe $[(f, K)] \in L_{(\zeta)}$ tal que $[(\iota \circ f, K)] = [(g, K)]$. Notemos que cada homomorfismo $\xi : K \to R$ satisface $\xi^{-1}(K) = K$, ya que $\xi^{-1}(K) \in \zeta$ y K es el elemento mínimo de ζ. En particular, $f^{-1}(L \cap K) = (\iota \circ f)^{-1}(K) = K$, así $\mathrm{Im}(f) \leq L \cap K$. También $\lambda^{-1}(K) = K$, entonces $\mathrm{Im}(\lambda) \leq K$. Por lo tanto $[(g, K)] \bullet [(\lambda, K)] = [(\iota \circ f, K)] \bullet [(\lambda, K)] = [(\lambda \circ h, K)]$, donde $h : K \to K$ es tal que $x \mapsto\ f(x)$. Dado que L y K son ideales, entonces $L \cap K$ es un ideal, e.d., es un submódulo totalmente invariante de R. Como R es auto-inyectivo, por el Lema 4.5.5, $L \cap K$ es un submódulo totalmente invariante de K. Por lo tanto, $\lambda_1(L \cap K) \leq L \cap K$, donde $\lambda_1 : K \to K$ es tal que $x \mapsto \lambda(x)$. Así que existe un homomorfismo $k : K \to L$ tal que $x \mapsto \lambda(f(x))$, así que $\lambda \circ h = \iota \circ k$. Concluimos que $[(g, K)] \bullet [(\lambda, K)] = [(\iota \circ k, K)] \in W$, por tanto W es un ideal de $R_{(\zeta)}$.

Q.E.D

Capítulo 5

Perspectivas de investigación

Este capítulo se destina a poner las incógnitas que se presentaron, así como nuevas ideas y que requieren más tiempo de investigación.

5.1. Clasificación de filtros de continuidad en anillos específicos

Pregunta 5.1.1. *Vimos que en los anillos auto-inyectivos, todos los filtros lineales son de continuidad, ¿y que hay del reciproco? ¿los conceptos de filtros de continuidad y los filtros lineales son equivalentes?*

Pregunta 5.1.2. *Además de AIP, DIPs, anillos locales uniseriales, ¿en que otros anillos podemos clasificar los filtros de continuidad?*

5.2. Filtros de continuidad en anillos de cocientes

Dado un filtro de continuidad ζ en un anillo A

Pregunta 5.2.1. *¿Como son los filtros de continuidad en $A_{(\zeta)}$?*

Pregunta 5.2.2. *¿Hay alguna relación de los filtros de continuidad en $A_{(\zeta)}$ con ζ?*

Pregunta 5.2.3. *¿Podemos asociar a ζ un filtro de continuidad específico en $A_{(\zeta)}$?*

5.3. Iteración de módulos de cocientes

Para cada filtro de continuidad ζ en un anillo A y $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$, tenemos que

$$M_{(\zeta)} \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{Mod})\,,$$

por lo que podemos aplicar de nuevo el cociente a éste y obtendremos

$$\left(M_{(\zeta)}\right)_{(\zeta)} \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{Mod})\,.$$

De esta manera, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ el A-módulo $M_{(n)}$ como sigue:

- $M_{(1)} := M_{(\zeta)}$, si $n = 1$
- $M_{(n)} := \left[M_{(n-1)}\right]_{(\zeta)}$, si $n > 1$.

Las cuestiones son las siguientes:

Pregunta 5.3.1. *¿El proceso iterativo se estaciona? Es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $M_{(n) \cong M_{(n_0)}}$. Si la respuesta es afirmativa, ¿en que punto se estaciona?*

Pregunta 5.3.2. *Si $M = A$, ¿para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_{(n)}$ es anillo? Y en tal caso $M_{(n)} \in A_{(n)}$-**Mod**.*

Pregunta 5.3.3. *¿El límite directo de los $A_{(n)}$ es un anillo? Si es así, ¿El límite directo de los M_n será un módulo sobre el límite directo de los A_n?*

5.4. Filtros de continuidad en módulos

Ahora bien, nos fijamos en la definición de filtro de continuidad, uno se puede dar cuenta fácilmente que este concepto se puede extender a cualquier A-módulo izquierdo, dando como resultado la siguiente definición (de hecho esto produce módulos de cocientes sobre dichos filtros de continuidad de módulos):

Definición 5.4.1. *Sea* $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *y* $\zeta \subseteq \mathcal{S}(M)$. *Diremos que* ζ *es* ***filtro de continuidad*** *en* M *si cumple:*

(1) $M \in \zeta$,

(2) *Si* $K, L \in \zeta$ *y* $f \in \mathrm{Hom}_A\,(K, M)$, *entonces* $f^{-1}\,(L) \in \zeta$.

Bajo este concepto, planteamos las siguientes incógnita ¿Se podría hacer teoría en la misma dirección que el capítulo previo?, es decir, podemos encontrar teoremas análogos a los que obtuvimos en el caso de los filtros de continuidad en un anillo A, por ejemplo:

Pregunta 5.4.2. *¿En que módulos se pueden clasificar los filtros de continuidad?*

Pregunta 5.4.3. *Sean* $M_1, \ldots, M_k$ *son* A*-módulos. ¿Qué relación hay entre un filtro de continuidad sobre* $M = \prod_{i=1}^{n} M_i$ *y los filtros de continuidad de cada* M_i*?*

Por supuesto que se pueden plantear más cuestiones concretas, pero como inicio sería bueno comenzar con la clasificación de estos filtros en módulos específicos.

5.5. Filtros de continuidad en módulos bajo equivalencias

Sin importar la eventual productividad de ampliar el concepto de filtros de continuidad en módulos izquierdos, hemos observado que es posible establecer dicha definición. Incluso podemos desarrollar módulos de cocientes utilizando filtros de continuidad en módulos, y el procedimiento de construcción es análogo al abordado en esta tesis. Esto se debe a que, al examinar detenidamente la demostración, queda claro que no depende de la estructura de anillo, sino más bien de su estructura como A-módulo izquierdo sobre sí mismo.

Considerando la posibilidad de extender el concepto de filtros de continuidad en módulos izquierdos, podemos llevar este enfoque a un nivel más elevado, específicamente a un nivel categórico. En concreto, al considerar dos categorías, A- **Mod** y B- **Mod**, surge la interrogante inicial: ¿Cuáles son las condiciones necesarias para establecer una «conexión» de filtros de continuidad de una categoría a otra? En este contexto, se plantea la idea de funtores adjuntos como un punto de partida. Es decir, si tenemos un par de funtores adjuntos entre las categorías A- **Mod** y B- **Mod**, ¿será posible a través de ellos conectar filtros de continuidad de un lado al otro? Esto es una pregunta bastante general, por ello, es mejor movernos en un terreno más manipulable y este es cuando A y B sean anillos Morita equivalentes, es decir, que las categorías A- **Mod** y B- **Mod** son equivalentes.

Si A y B son Morita equivalentes, M un A-módulo izquierdo fijo y $F : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow B\text{-}\mathbf{Mod}$ el funtor que induce la equivalencia, es decir, F es pleno, fiel y denso. Tenemos que $F(M)$ es un B-módulo izquierdo, nos preguntamos ¿podemos establecer una relación entre los filtros de continuidad en M con los filtros de continuidad en $F(M)$? Más explícitamente, la propuesta de relación es la siguiente: Dado ζ_M un filtro de continuidad de M, para cada $K \in \zeta_M$, consideramos la inclusión $\iota_K : K \hookrightarrow M$, aplicamos el funtor F y tenemos $F\,(\iota_K) : F(K) \rightarrowtail F(M)$, así, podemos considerar el siguiente conjunto

$$F\,(\zeta_M) := \{\mathrm{Im}\,(F\,(\iota_K)) : K \in \zeta_M\}\,.$$

¿$F\,(\zeta_M)$ es un filtro de continuidad de $F(M)$? En particular, ¿qué pasa cuando $M = A$?

Al estudiar los filtros de continuidad en un A-módulo fijo M, también podemos cuestionarnos cosas como:

- ¿Podemos dar ejemplos diversos?
- ¿Qué podemos decir de los módulos de cocientes asociados?

5.6. Categoría de módulos filtrados

La **categoría de A-módulos filtrados** es la categoría cuyos objetos son

$$\mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{ModFil}) := \{(M, \zeta_M) : M \in A\text{-}\mathbf{Mod} \text{ y } \zeta_M \text{ es un filtro de continuidad sobre } M\}\,.$$

Para cada $X_M = (M, \zeta_M), X_N = (N, \zeta_N) \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{ModFil})$ su conjunto de morfismos es:

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{ModFil}}\,(X_M, X_N) := \left\{f \in \mathrm{Hom}_A(M, N) : \forall L \in \zeta_N, f^{-1}(L) \in \zeta_M\right\}$$

y la composición es la natural, esto es: para cada $X_M = (M, \zeta_M), X_N = (N, \zeta_N), X_L = (L, \zeta_L) \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{ModFil})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{ModFil}}\,(X_M, X_N)$, $g \in \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{ModFil}}\,(X_N, X_L)$, se tiene que

$$g \circ f \in \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{ModFil}}\,(X_N, X_L)\,, \text{ pues, para todo } W \in \zeta_L, (g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right) \in \zeta_M,$$

donde esta última composición «$\circ$» es la composición usual de A-homomorfismos.

Veamos la veracidad de las propiedades de $\circ$ que hacen que A-**ModFil** sea una categoría. Para ello, sean $X_M = (M, \zeta_M)$, $X_N = (N, \zeta_N)$ y $X_L = (L, \zeta_L)$:

(a) La asociatividad se cumple gracias a que es heredado de los A-homomorfismos.

(b) Para cada $X_M = (M, \zeta_M) \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{ModFil})$, los A-homorfismos identidad $\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M$ están en $\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{ModFil}}\,(X_M, X_M)$, pues para todo $W \in \zeta_M$, $\mathrm{id}_M^{-1}(W) = W$. Por lo tanto, Y la propiedad de estos homomorfimos es heredada.

Por lo tanto, A-**ModFil** es una categoría. Es importante notar que esta categoría tiene su similitud con la categoría de espacios topológicos, cuyos morfismos son las funciones continuas, y que sabemos que la continuidad de una función esta definida mediante los espacios topológicos de sus dominio y codominio, y esta es una de las razones principales del por qué nombremos a los nuevos filtros como «**filtros de continuidad**».

Ahora, podemos plantearnos las siguientes cuestiones:

Pregunta 5.6.1. *¿Qué propiedades tiene esta categoría?*

Pregunta 5.6.2. *¿Es posible describir una categoría de módulos filtrados para un anillo específico?*

Conclusiones

Los trabajos sobre teorías de torsión y prerradicales del grupo de Teoría de Anillos de México fundado por el Dr. Francisco Raggi Cárdenas son vitales y esenciales para el entendimiento de este texto, sin embargo, es importante resaltar que este trabajo: **Módulos de Cocientes sobre Filtros de Continuidad** abre una nueva ruta de exploración en cuanto a localización.

El principal concepto que rodea este texto es: **filtro de continuidad**, que de hecho por la proposición 4.1.6 sabemos que generaliza el concepto de filtro de Gabriel. Así, se tiene otra generalización de filtro de Gabriel alterna a filtro lineal. Es entonces interesante comparar ambos tipos de generalizaciones en diversos anillos específicos. En este trabajo, se compararon los tres conceptos de filtros en **DIPs**, **anillos locales uniseriales**, en anillos conmutaivos de ideales principales (**AIP especial**) y **anillos semisimples**, en este último los tres conceptos coinciden.

Dicha generalización es igual de útil, pues todo el panorama o proceso de localización se puede definir respecto a un filtro de continuidad ζ cualesquiera, es decir, para un anillo A tenemos su anillo de cocientes $A_{(\zeta)}$, para cada $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{Mod})$ tenemos su módulo de cocientes $M_{(\zeta)}$, y con estos ingredientes se forma la categoría $A_{(\zeta)}\text{-}\mathbf{Mod}$. Tenemos un homomorfismo que conecta cada A-módulo M con su modulo de cocientes $M_{(\zeta)}$ y que nosotros denotamos este A-homomorfismo como $\varphi_M : M \longrightarrow M_{(\zeta)}$, también un funtor $F_\zeta : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A_{(\zeta)}\text{-}\mathbf{Mod}$ que manda cada A-módulo a su módulo de cocientes $M_{(\zeta)}$, un funtor olvidadizo $F'_\zeta : A_{(\zeta)}\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$ y en consecuencia obtenemos el funtor $L := F'_\zeta \circ F_\zeta : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$. Y una transformación natural $\varphi = \{\varphi_M\}_{M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})} : \mathrm{id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}} \longrightarrow L_\zeta$.

Ahora, en general sabemos que no se había hecho localización sobre filtros lineales, sin embargo, en **AIP**'s especiales, en los **anillos locales uniseriales** los filtros de continuidad coinciden con los filtros lineales, de modo que al menos en estos anillo si podemos hacer localización en filtros lineales. Por otro lado, una diferencia notable entre la localización sobre filtros de Gabriel y sobre filtros de continuidad es la siguiente: si $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{Mod})$, $\mathcal{G}$ es un filtro de Gabriel y ζ es un filtro de continuidad, entonces $M_{(\mathcal{G})} \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{Mod})$ y $M_{(\zeta)} \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{Mod})$, por lo que tenemos la posibilidad de aplicarle de nuevo el cociente y así obtener que $\left(M_{(\mathcal{G})}\right)_{(\mathcal{G})} \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{Mod})$ y $\left(M_{(\zeta)}\right)_{(\zeta)} \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{Mod})$. Entonces al aplicar este proceso de manera inductiva se obtiene en el primer caso (sobre filtros de Gabriel) que el proceso se estaciona en el segundo paso, es decir, todos los módulos obtenidos después del segundo paso son isomorfos a este, y esta es la razón por la cual al módulo $\left(M_{(\mathcal{G})}\right)_{(\mathcal{G})} \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{Mod})$ se llama **el módulo de cocientes de** M **en** $\mathcal{G}$ y se denota como $M_{\mathcal{G}}$. Por otro lado, en el segundo caso, el proceso inductivo no se estaciona, es decir, se puede continuar en ciertos casos de manera «infinita» sin obtener módulos isomorfos. Entonces, una de las principales incógnitas es; ¿los módulos de cocientes sobre filtros de continuidad obtenidos de manera iterativa a partir de un módulo dado M se estacionan en algún punto? como ésta y muchas más incógnitas podremos encontrar en este nuevo tema.

Hay una segunda diferencia entre ambas localizaciones: si $\mathcal{G}$ es un filtro de Gabriel en A y ζ es un filtro de continuidad en A, entonces existe un único radical $r_{\mathcal{G}}$ asociado a $\mathcal{G}$, sin embargo, para ζ hay un prerradical asociado $r_\zeta : A\text{-}\mathbf{Mod} \longleftarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$ dado por $r_\zeta(M) = \mathrm{Nu}(\varphi_M)$, para cada $A-$módulo M, que es exacto izquierdo, pero no necesariamente es radical y tampoco es el asociado de un único filtro de continuidad.

Estas diferencias abren un abanico de posibilidades para continuar la investigación.

La clasificación de filtros de continuidad es un problema interesante sobre ciertos anillos específicos, como se ha hecho en este trabajo sobre **DIPs**, **anillos locales uniseriales**, **AIP especiales** y **semisimples**.

Por lo tanto, podemos afirmar que este trabajo marca el comienzo de una nueva línea de investigación que confiamos en que resulte productiva. Aunque hemos establecido los cimientos de este rubro, somos conscientes de que aún persisten numerosos interrogantes por abordar en esta dirección.

Bibliografía

[1] J. Adámek, H. Herrlich, G.E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories* (London, GB: John Wiley and Sons, 1990).

[2] F. Anderson, K. Fuller, *Rings and Categories of Modules* (Springer-Verlag, 1992).

[3] R. Fernández-Alonso, J. Magaña, *Galois connections between lattices of preradicals induced by adjoint pairs between categories of modules* (Appl Categor Struct 24, 241–268, 2016).

[4] R. Fernández-Alonso, J. Magaña, *Galois connections between lattices of preradicals induced by ring epimorphisms.* (Journal of Algebra and Its Applications, 2019).

[5] R. Férnandez-Alonso, F. Raggi, R. Rincón, J. Ríos, C. Signoret, *The lattice structure of preradicals* (Comm. Algebra. **30**(3), 1533-1544, 2002).

[6] J. Golan, *Torsion Theories* (Longman Scientific Technical, John Wiley and Sons, 1986).

[7] Carl Faith, *On Köthe Rings* (Math. Annalen 164, 207-212, 1966).

[8] J. Magaña, *Morfismos entre retículas de prerradicales asociados a funtores entre categorías de módulos* (México: Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, 2016).

[9] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra* (Springer, 2008).

[10] B. Stenström, *Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory* (Springer-Verlag, 1975).

[11] J. Dauns, *Modules and Rings* (Cambrige University Press, 1994).

[12] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician* (Springer, 1998).

[13] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory: A Handbook for Study and Research* (University of Dusseldorf, 1991).

[14] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra, Volume I* (D. Van Nostrand Company, 1958).