Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

COLORACIÓN DE GRÁFICAS

TESIS

Que para obtener el grado de:

Licenciado en Ciencias

Con especialidad en:

Matemáticas Básicas

PRESENTA:

Juan Carlos Cruz González

DIRECTOR DE TESIS:

Bernardo Llano Perez

Julio 2017 CDMX, México

Índice general

Introducción

Hay pocas dudas de que el área más conocida y estudiada de la teoría de gráficas es la coloración.

La coloración de gráficas es sin duda el tema más popular en la teoría de gráficas. (Noga Alon, 1993).

Este documento está dedicado a este importante tema. Con sus orígenes en los intentos de resolver el famoso problema de los cuatro colores, la coloración de gráficas se ha convertido en un tema de gran interés, en gran parte debido a sus diversos resultados teóricos, sus problemas no resueltos y sus numerosas aplicaciones. Los problemas de coloración de gráficas que han recibido la mayor atención son las coloraciones de vértices de una gráfica. Por otra parte, los problemas de coloración de vértices que se han estudiado más frecuentemente son lo que se conocen como coloraciones propias de vértices. Comencemos con esto.

Capítulo 1

Coloración de vértices

Una coloración propia de vértices de una gráfica G es la asignación de colores de los vértices de G, un color a cada vértice, de tal manera que vértices adyacentes le corresponden colores diferentes. Nosotros nos referiremos a esto simplemente como una **Coloración** de G, es decir, cuando decimos una Coloración de G , nos referimos a una coloración propia. Usaremos los enteros positivos $\{1, 2, ..., k\}$ para denotar a los colores y si en algún momento necesitamos otro conjunto de colores diferentes lo denotaremos como $\{k+1, k+2, ..., k+k'\}$, además para este escrito el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3...., n, ...\}$ y $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.

1.1. El número cromático de una gráfica

Definición 1.1.1. *Diremos que una gráfica H es subgráfica de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(H)$ y lo denotaremos como $H \subseteq G$(o $H \leq G$).*

Definición 1.1.2. *Diremos que H es subgráfica propia de G si $H \subseteq G(H \leq G)$ y $\exists u \in V(G)$ tal que $u \notin V(H)$ o $\exists e \in E(G)$ tal que $E \notin E(H)$ y lo denotaremos como $H \subset G$ (o $H < G$).*

Definición 1.1.3. *Una **coloración** (propia) de G es una función $c : V(G) \longrightarrow S$ t.q $c(u) \neq c(v)$ si $\{u, v\} \in E(G)$.*

Definición 1.1.4. *Diremos que una coloración de una gráfica G es una **k-coloración**, si cada color usado es un elemento de $S = \{1, 2, ..., k\}$, es decir, es uno de los k colores.*
(Obsérvese que en una k-coloración no necesariamente se usan los k colores.)

Sea G una gráfica y c una k-coloración de G . Sea $u, v \in V(G)$ diremos que $u \sim v$ *ssi* $c(u) = c(v)$.

Proposición 1.1.5. *$\sim$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. 1) sea $u \in V(G)$, como $c(u) = c(u)$, entonces $u \sim u$.
Por tanto $\sim$ es reflexiva.

2) sea $u, v \in V(G)$ t.q. $u \sim v$,

$$\Rightarrow c(u) = c(v) \Rightarrow c(v) = c(u), \text{ entonces } v \sim u.$$

Por tanto $\sim$ es simétrica. 3)sea $u, v, w \in V(G)$ t.q. $u \sim v$ y $v \sim w$,

$$\Rightarrow c(u) = c(v) \text{ y } c(v) = c(w) \Rightarrow c(u) = c(w), \text{ entonces } u \sim w.$$

Por tanto $\sim$ es transitiva.

De 1), 2) y 3) se sigue que $\sim$ es una relación de equivalencia. $\square$

De lo anterior se sigue que $\sim$ induce una partición en V(G), así,
Sea $V_i = \{v \in V(G) : c(u) = i\}$, para $1 \leq i \leq k$.

Observese que los subconjuntos V_i no vacíos son las clase de equivalencia. Y ademas por como lo hemos establecido la relación de equivalencia y de la definición de una coloración de G, se sigue que cada clase de equivalencia es un subconjunto independiente de vértices en G llamaremos a V_i una **clase cromática**.

Definición 1.1.6. *Una gráfica G es **k-coloreable** si existe una k-coloración de G.*

Observese que para una gráfica G de orden n, es n-coloreable

Definición 1.1.7. *Sea G una gráfica, definimos el **número cromático** de G como*

$$\chi(G) := m \in \{k \in \mathbb{N} : G \text{ es } k\text{-coloreable}\}$$

Definición 1.1.8. *Una gráfica G se llama **gráfica k-cromática** si $\chi(G) = k$*

De las definición 1.5 se sigue que si una gráfica G es tal que $\chi(G) = k$ entonces existe una k-coloración de G pero, no una $(k-1)$-coloración de G, ádemas una gráfica G es k-coloreable si y solo si $\chi(G) \leq k$. Si tenemos una k-coloración de una gráfica k-cromática entonces necesariamente se debe de utilizar los k colores.

Teorema 1.1.9. *Sea G una gráfica y $H \subseteq G$, entonces $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$, G una gráfica y $H \subseteq G$ tal que $\chi(G) = k$, entonces existe una k-coloración c de G .

$$\Rightarrow c\mid_{V(H)} \text{ es una } k\text{-coloración de } H \Rightarrow \chi(H) \leq k$$

Por tanto,

$$\chi(H) \leq \chi(G)$$

$\square$

Definición 1.1.10. *Sea G una gráfica, definimos el número de clan de G como*

$$\omega(G) := max\{|H| : H \subseteq G,\ H \text{ es completa}\}$$

Corolario 1.1.11. *Para cada gráfica G, $\omega(G) \leq \chi(G)$*

Demostración. Sea G una gráfica y sea $H \subseteq G$, H completa, t.q $\omega(H) = |H|$,

Dado que H es completa, entonces

$$|H| = \chi(H) \Rightarrow \omega(H) = \chi(H)$$

y por el teorema 1.7 se sigue que $\chi(H) \leq \chi(G)$ $\square$

Una de las operaciones en teoría de gráficas que se encuentra a menudo es la unión. Definiremos la unión solo para gráficas disjuntas, pues podemos reducir nuestro estudio a las componentes conexas.

Definición 1.1.12. *Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ gráficas disjuntas,*

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$$

Entonces nosotros podemos preguntarnos cual es el número cromático de una gráfica que es la unión de las gráficas $G_1, G_2, ..., G_n$

Proposición 1.1.13. *Para gráficas $G_1, G_2, ..., G_n$ disjuntas y $G = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$ se tiene que*

$$\chi(G) = max\{\chi(G_1), ..., \chi(G_n)\}$$

Demostración. Definamos

$\mathcal{D}$:=conjunto de gráficas disjuntas

$\mathcal{G}_n$ $:= \{G : G = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$ donde $G_j \in \mathcal{D}, \forall j \in \{1, .., n\}$ $\}$

Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : \forall\ G \in \mathcal{G}_n \Rightarrow \chi(G) = max\{\chi(G_k)\}_{k=1}^{n}, G_k \in \mathcal{D}$ y $G = \bigcup_{k=1}^{n} G_k\}$

1) Si $G \in \mathcal{G}_1$ no hay nada que hacer y si $G \in \mathcal{G}_2$ el resultado es claro.
   Por tanto $1, 2 \in S$

2) Supongamos que $1, ..., n \in S$
   P.D que $n + 1 \in S$
   Dem.
   Sea $G \in \mathcal{G}_{n+1} \Rightarrow \exists\ G_j \in \mathcal{D}$ con $1 \leq j \leq n + 1$ t.q $G = \bigcup_{k=1}^{n+1} G_k$
   Ahora, $G' = \bigcup_{k=1}^{n} G_n \in \mathcal{G}_n$ y como $n \in S$

$$\Rightarrow \chi(G') = max\{\chi(G_1), ..., \chi(G_n)\}$$

   $G = G' \cup G_{n+1}$ y $G', G_{n+1} \in \mathcal{D} \Rightarrow G \in \mathcal{G}_2$

$$\Rightarrow \chi(G) = max\{\chi(G'), \chi(G_{n+1})\} \Rightarrow \chi(G) = max\{\chi(G_1), ..., \chi(G_{n+1})\}$$

   Por lo tanto, $n + 1 \in S$

De 1) y 2) y por el principio de inducción matemática se sigue que $S = \mathbb{N}$, en consecuencia

$\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ G \in \mathcal{G}_n \Rightarrow \chi(G) = max\{\chi(G_1), ..., \chi(G_n)\}$ donde $G = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$ y $G_k \in \mathcal{D}$ $\square$

Proposición 1.1.14. *Si G es una gráfica conexa no trivial con bloques $B_1, B_2, ..., B_n$, entonces*

$$\chi(G) = max\{\chi(B_i) : 1 \leq i \leq n\}$$

Demostración. Difinamos $\mathcal{B}_n = \{G : G$ es una gráfica conexa no trivial con $B_1, B_2, ..., B_n$ bloques$\}$

Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : \forall\ G \in \mathcal{B}_n \Rightarrow \chi(G) = max\{\chi(B_i) : 1 \leq i \leq n\}$ $\}$

1) Sea $G \in \mathcal{B}_1$, $G = B_1$, *i.e* G es un bloque

$$\Rightarrow \chi(G) = \chi(B_1)$$

Por lo tanto, $1 \in S$

2) Supongamos que $1, ..., n \in S$
P.D que $n+1 \in S$
Dem.
Sea $G \in \mathcal{B}_{n+1}$, y considerese el árbol de bloques $\mathcal{A}_G$, entonces,

$\exists\ B_j \in V(\mathcal{A}_G)$ que es hoja, podemos suponer que $j = n+1$ (renombrando)

Sea $G' \in \mathcal{B}_n$ t.q tiene como árbol de bloques a $\mathcal{A}_G - B_{n+1}$

$$\text{como } n \in S \Rightarrow \chi(G') = max\{\chi(B_i) : 1 \leq i \leq n\}$$

tomemos $k' = \chi(G')$ y $k = \chi(B_n)$.

Recordemos que cualquiera dos bloques adyacentes en el árbol de bloques comparten solo y solo un vértice, de esta manera

Afirmo: G es $max(k', k)$-coloreable.

Sea $c_{G'}$ una $max(k', k)$-coloración de G' y c_{B_n} una $max(k', k)$-coloración de B_n y tomemos $v \in V(G') \cap V(B_n)$.

Si $c_{G'}(v) = c_{B_n}(v)$ hemos terminado.
en caso contrario, Sea π una permutación de $\{1, 2, ..., max(k', k)\}$ t.q

$$\pi(c_{B_n}(v)) = c_{G'}(v)$$

de esta manera, se tiene que G es $max(k', k)$-coloreable,

$$\Rightarrow \chi(G) = max\{\chi(B_i) : 1 \leq i \leq n+1\}$$

por lo tanto, $n+1 \in S$

De 1), 2) y por el principio de inducción matemática se sigue que $S = \mathbb{N}$
i.e $\forall\ G \in \mathcal{B}_n \Rightarrow \chi(G) = max\{\chi(B_i) : 1 \leq i \leq n\}$ □

Definición 1.1.15. *Sea G y H gráficas, definimos $G + H := (V, E)$ donde,*

$V = V(G) \cup V(H)$

$E = E(G) \cup E(H) \cup \{\{u, v\} : u \in V(G), v \in V(H)\}$

Lema 1.1.16. *$\forall\ G$ y G' gráficas, tenemos que*

$$\chi(G + G') = \chi(G) + \chi(G')$$

Demostración. Sean G y G' gráficas y sean $k = \chi(G)$ y $k' = \chi(G')$, entonces

$$\Rightarrow \exists\ c \text{ una } k\text{-coloración de } G \text{ y } \exists\ c \text{ una } k'\text{-coloración de } G'$$

Podemos asumir que las coloraciones las hacemos con colores diferentes, así, suponga que $\{1, ..., k\}$ y $\{k+1, ..., k+k'\}$ son los colores usados en c y c', respectivamente.

Definamos $c'' : V(G+G') \longrightarrow \{1, .., k, k+1, ..., k+k'\}$ dado por

$$c''(u) = \begin{cases} c(u) & si \quad u \in V(G) \\ c'(u) & si \quad u \in V(G') \end{cases}$$

De esta manera tenemos que c'' es una (k+k')-coloración de $G+G'$

$$\Rightarrow \chi(G+G') \leq k+k' \Rightarrow \chi(G+G') \leq \chi(G) + \chi(G')$$

Si existiese c una $(k+k'-1)$-coloración de $G+G'$, entonces

$|c(V(G))| \geq k$, pues $k = \chi(G) \Rightarrow |c(V(G')| \leq k'-1 \Rightarrow \exists$ una coloración de G' con menos de k' colores lo cual no es posible, pues $k' = \chi(G')$, en consecuencia

$$\Rightarrow \chi(G+G') = \chi(G) + \chi(G')$$

□

Proposición 1.1.17. *Para gráficas $G_1, G_2, ..., G_n$ y $G = G_1 + G_2 + ... + G_n$*

$$\chi(G) = \sum_{j=1}^{n} \chi(G_j)$$

(Por inducción sobre n)

Demostración. Para $n = 1$ es evidente, pues $\chi(G) = \chi(G_1)$

Supongamos que para $\forall$ G con $G = G_1 + G_2 + ... + G_r$, $1 \leq r \leq n-1$ se cumple que

$$\chi(G) = \sum_{j=1}^{r} \chi(G_j)$$

Ahora,
Sea G t.q $G = G_1 + G_2 + ... + G_n$ tomemos $G' = G_1 + ... + G_{n-1}$

$$\Rightarrow \chi(G') = \sum_{j=1}^{n-1} \chi(G_j)$$

Como $G = G' + G_n$ y usando el Lema 13, se sigue que $\chi(G) = \chi(G') + \chi(G_n)$

$$\Rightarrow \chi(G) = \sum_{j=1}^{n} \chi(G_j)$$

□

Es evidente, que si $k \geq 2$ entonces cada gráfica k-partita es k-coloreable, pues a cada vértice de una partición le podemos asignar uno de lo k colores distintos. Por tanto si G es una gráfica k-partita, entonces $\chi(G) \leq k$. Por otra parte, las siguientes afirmaciones son consecuencia de la proposición 14.

Toda gráfica k-partita completa tiene número cromático k.

Ya que toda gráfica completa K_n es una gráfica n-partita completa, $\chi(K_n) = n$. Ademas si G es una gráfica de orden n tal que no es completa, entonces podemos asignarle el color 1 a dos vértices no adyacentes de

G y asignamos colores distintos a los $n-2$ vértices restantes de G, produciendo asi una $(n-1)$-coloración de G. Por tanto:
Una gráfica G de orden n tiene número cramático n si y solo si $G = K_n$

Si G contiene a lo más un par de vértices adyacentes, entonces se necesitan a lo más 2 colores para colorear los vértices de G , asi tenemos que:
Una gráfica G de orden n tiene número cromático 1 si y solo si $G = \overline{K}_n$

Por tanto una gráfica G que tiene número cromático 2, tiene mínimo una árista.

Una gráfica G no vacia tiene número cromático 2 si y solo si G es bipartita

Tengamos encuenta las afirmaciones anteriores.

Proposición 1.1.18. *Una gráfica es 2-coloreable si y solo si G es bipartita*

Demostración. $\Rightarrow$) Suponga que G es 2-coloreable, entonces

$\exists\ c$ 2-coloración de G, sean V_1 y V_2 las clases de color inducidos por c, estos conjuntos son independientes, esto es:

$$\forall\ \{u, v\} \in E(G) \Rightarrow$$

es decir, G es bipartita $\Leftarrow$) suponga que G es bipartita, entonces

$\exists\ U,\ V \subset V(G)$ tal que $U \bigcap V = \varnothing$ y

$$\forall\ \{u, v\} \in E(G) \Rightarrow$$

Sea $c : V(G) \longrightarrow \{1, 2\}$, definido por

$c(u) =$
$$\begin{cases} 1 & si \quad u \in V \\ 2 & si \quad u \in U \end{cases}$$

c es una 2-coloración de G , así G es 2-coloreable

□

Corolario 1.1.19. *Para toda G gráfica no trivial, Si G bipartita y conexa, entonces $\chi(G) = 2$*

Dem.
Sea G una gráfica no trivial t.q G es bipartita y conexa

G no trivial $\Rightarrow |V(G)| \geq 2$

G bipartita $\Rightarrow \chi(G) \leq 2$ se sigue de la Proposición 1.5

G conexa $\Rightarrow \exists u, v \in V(G)$ t.q $\{u, v\} \in E(G)$

Así, $\forall\ c$ coloración de G, $c(u) \neq c(v)$, en consecuencia

$$\chi(G) = 2$$

□

Definición 1.1.20. *Un ciclo de longitud $n \in \mathbb{N}$ es una gráfica $C_n = (V_n, E_n)$, donde*

$V_n \ = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\}$

$E_n \ = \{\{x_r, x_{r+1}\} : r \in \mathbb{Z}_n\}$

Definición 1.1.21. *Sea G una gráfica y $U \subseteq V(G)$, la gráfica inducida por U se define como,*

$$G[U] = (U, E), \text{ donde } E = \{\{u, v\} \in E(G) : u, v \in U\}$$

Teorema 1.1.22. *Sea G una gráfica conexa*
Si $\forall\ u \in V(G)$, u esta en a lo más en k ciclos de tamaño impar, $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\chi(G) \leq \lceil \tfrac{1+\sqrt{8k+9}}{2} \rceil$$

Demostración. Sea G una gráfica,
Observación: Si k=0, entonces G es bipartita, y por la proposición anterior se sigue que

$$\chi(G) \leq 2$$

Supongase entonces que $k \geq 1$. Sea $t = \lceil \frac{1+\sqrt{8k+9}}{2} \rceil$, observese que

$$k \geq 1 \Rightarrow t \geq 3,$$

Diremos que una gráfica G tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si $\forall\ u \in V(G)$, u esta en a lo más en k ciclos de tamaño impar, $k \in \mathbb{N}$

Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : \forall\ G$ con la propiedad $\mathcal{P}$ y $|V(G)| = n$, se cumple que $\chi(G) \leq t\ \}$.

i) $1 \in S$, pues $\forall\ G$ con $|V(G)| \leq t$, se tiene que $\chi(G) \leq t$

ii) Supongamos que $1, ..., n \in S$
P.D que $n + 1 \in S$
Dem.
Sea G una gráfica t.q. tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y $|V(G)| = n + 1$

Sea $u \in V(G)$ y consideremos la gráfica $G - u$, obviamente $G - u$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y $|V(G - u)| = n$

Como $n \in S \Rightarrow \chi(G - u) \leq t$. Sea c una t-coloración de $G - u$, dado que $t = \lceil \frac{1+\sqrt{8k+9}}{2} \rceil$, se sigue que

$$\tfrac{1+\sqrt{8k+9}}{2} \leq t \Rightarrow k \leq \tfrac{t^2-t-2}{2} = \tbinom{t}{2} - 1$$

Así,
$\exists\ i, j$ con $i \neq j$ t.q si $\mathcal{C} \leq G$ es un ciclo de longitud impar y $\{u, v\} \in V(\mathcal{C})$, entonces $c(v) \neq i, j$

Sea $\mathcal{V} = \{v \in V(G - u) : c(v) = i \ o \ c(v) = j\}$ y consideremos $G[\mathcal{V}]$, claramente $G[\mathcal{V}]$ es bipartita

Si $\forall\ v \in \mathcal{V}$ t.q. $c(v) = i$ se tiene que $\{u, v\} \notin E(G)$, entonces $c(u) = i$, por tanto

$$\chi(G) \leq t$$

Supongase entonces que $\exists\ v \in \mathcal{V}$ t.q. $c(v) = i$ y $\{u, v\} \in E(G)$, de esta manera.

Sea $G'_1, G'_2, ..., G'_s$ las componentes conexas de $G[\mathcal{V}]$ tales que $\exists\ v_r \in V(G'_r)$ con $\{u, v_r\} \in E(G)$ y $c(v_r) = i$, $1 \leq r \leq s$

Si existiese $w \in V(G_r)$ t.q $\{u, w\} \in V(G)$, para algún $r \in \{1, 2, ..., s\}$ y $c(w) = j$

$\Rightarrow \exists$ (v_r, w)- trayectoria $\mathcal{T}$ en G'_r, necesariamente debe ser de longitud impar, pues $G[\mathcal{V}]$ es bipartita

$\Rightarrow \mathcal{T} + \{u, v_r\} + \{u, w\}$ es un ciclo de longitud impar y los dos vecinos de u son de color i y j .

Esto no es posible.

Por lo tanto, $\nexists\ w \in V(G'_r)$ t.q. $\{u, w\} \in V(G)$ y $c(w) = j$, $1 \leq r \leq s$

Sea $\Delta = \bigcup_{r=1}^{s} V(G'_r)$ y c' una coloración de G t.q. $c'(u) = i$, y

$$\forall\ v \in V(G-u),\ c'(v) = \begin{cases} c(v) & si \quad v \notin \Delta \\ i & si \quad c(v) = j \quad y \quad v \in \Delta \\ j & si \quad c(v) = i \quad y \quad v \in \Delta \end{cases}$$

De esta manera c' es una t-coloración de G, por tanto

$$\chi(G) \leq t$$

$\Rightarrow n + 1 \in S$

De $i)$, $ii)$ y por el principio de inducción matemática, se concluye que $S = \mathbb{N}$, en consecuencia se tiene que:

$\forall\ G$ con la propiedad $\mathcal{P}$, se cumple que $\chi(G) \leq t$ □

Proposición 1.1.23. $\forall\ n \geq 3$ *se tiene que:*

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & , si \quad n \quad es \quad par \\ 3 & , si \quad n \quad es \quad impar \end{cases}$$

Demostración. Sea $n \geq 3$, $C_n = (V_n, E_n)$

i Si n es par $\Rightarrow n = 2r$ para algún $r \in \mathbb{N}$

Sea $V = \{x_j \in V_n : j \equiv 0 \pmod{2}\}$ y $U = \{x_j \in V_n : j \equiv 1 \pmod{2}\}$

Claramente $V \cap U = \varnothing$ y $V_n = V \cup U$

para $\{x_i, x_{i+1}\} \in E_n$,

$x_i \in V \Leftrightarrow i \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow i + 1 \equiv 1 \pmod{2} \Leftrightarrow x_{i+1} \in U$,

$x_{i+1} \in V \Leftrightarrow i + 1 \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow i \equiv 1 \pmod{2} \Leftrightarrow x_i \in U$

Así, C_n es bipartita,

$$\Rightarrow \chi(C_n) = 2$$

ii Si n es impar

$$\Rightarrow \chi(C_n) \geq 3, \text{ se sigue de la proposición 1.5}$$

tenemos que $n-1$ es par, así

sea $C = (C_n - \{x_0\}) + \{\{x_{n-1}, x_1\}\}$

C es un ciclo de longitud $n-1$ y como n-1 es par, se sigue que

$$\chi(C) = 2$$

Sea c' una 2-coloración de C y c una coloración de C_n dado por

$$c(u) = \begin{cases} c'(u) & , si \quad u \in V(C) \\ 3 & , si \quad u = x_0 \end{cases}$$

c es una 3-coloración de $C_n \Rightarrow \chi(C_n) \leq 3$, en consecuencia

$$\chi(C_n) = 3$$

Así de $i)$ y $ii)$ se obtiene que,

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & , si \quad n \quad es \quad par \\ 3 & , si \quad n \quad es \quad impar \end{cases}$$

□

Para una gráfica G, $\alpha(G)$ es el número máximal de vértices independientes de G

Proposición 1.1.24. *Sea G una gráfica t.q. $|V(G)| = n$, entonces*

$$\tfrac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$$

Demostración. Sea G una gráfica t.q. $|V(G)| = n$, y supongase que $\chi(G) = k$, entonces

para cada k-coloración de G tendremos las clases cromáticas $V_1, ..., V_k$.

Así,

$$n = |V(G)| = \sum_{j=1}^{k} |V_j| \leq k\alpha(G) \Rightarrow \tfrac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$$

Ahora,
Sea $U \subseteq V(G)$ independiente t.q. $|U| = \alpha(G)$ y c una coloración de G tal que,
$\forall\ v \in U\ c(v) = 1$ y c asigna un color diferente a cada vértice de $G - U$, de esta manera,

$$\chi(G) \leq |V(G) - U| + 1 = n - \alpha(G) + 1$$

Por lo tanto,

$$\tfrac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G)| \leq n - \alpha(G) + 1$$

□

1.2. Gráficas perfectas

Como se vio anteriormente, para una gráfica G $\omega(G) \leq \chi(G)$, es decir, el número de clan $\omega(G)$ es una cota inferior de su número cromático $\chi(G)$, ademas evidentemente para las gráficas completas y las gráficas bipartitas se cumple la igualdad.
Tambien existen muchas gráficas cuyo número cromático exceden su número de clan, como es la gráfica de Petersen

Definición 1.2.1. *Sea H una gráfica , diremos que G es H-libre $\forall\ U \subseteq V(G)$ se tiene que $H \not\simeq G[U]$*

«Si una gráfica G es K_3-libre, diremos que G es una gráfica libre de triángulos.»

Teorema 1.2.2. *$\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\exists\ G$ k-cromática t.q G es K_3-libre*

Demostración. Sea $S = \{k \in \mathbb{N} : \exists\ G\ k\text{-cromática y } G \text{ es } K_3\text{-libre}\}$

i) $1 \in S$, pues $\forall\ G = (V, E)$ con $E = \varnothing$ y $|V| \geq 1$, se tiene que

$$\chi(G) = 1, \text{ esto es } G \text{ es 1-cromática}$$

ii) Supongamos que $\{1, ..., k\} \subseteq S$
P.D que $k + 1 \in S$
Dem.
Por hipótesis $k \in S$, entonces

Sea H una gráfica t.q H es K_3-libre $\chi(H) = k$ y $V(H) = \{v_1, ..., v_n\}$

definamos, $G = (V, E)$, donde

$V := V(H) \cup \{u, u_1, ..., u_n\}$
$E := E(H) \cup \{\{u, u_j\} : 1 \leq j \leq n\} \cup \{\{u_i, v_j\} : \{v_j.v_i\} \in E(H), 1 \leq i \leq n\}$

Obs: $U = \{u_1, ..., u_n\}$ es independiente en G y $\{u, v_j\} \notin E(H)\ \forall\ j = 1, .., n$
Esto se sigue de la construcción de G

Supongase que $\exists\ T \leq G$ t.q $T \backsimeq K_3$,

por la elección de H y la observación(Obs) inmediatamente se obtiene que

$V(T) = \{u_i, v_j, v_r\}$, $E(T) = \{\{u_i, v_j\}.\{u_i, v_r\}, \{v_j, v_r\}\}$

$\Rightarrow \{v_i, v_j\}, \{v_i, v_r\} \in E(H)$
Pero, $\{v_j, v_r\} \in E(H) \Rightarrow H$ no es K_3-libre
lo cual, no es posible

Por lo tanto, $\nexists\ T \leq G$ t.q $T \backsimeq K_3$, *i.e* G es K_3-libre

Ahora, sea c' una k-coloración de H ($H \leq G$) y definamos

$c : V(G) \longrightarrow \{1, 2, ..., k, k + 1\}$ dado por

$$c(v) = \begin{cases} c(v) & , si \quad v \in V(H) \\ c(v_i) & , si \quad v = u_i \\ k + 1 & si \quad v = u \end{cases}$$

Así, c es una $k + 1$-coloración de G, en consecuencia

$$k \leq \chi(G) \leq k+1$$

Supongase que $\chi(G) = k$ sea c' una k-coloración de G y definamos

$c : V(H) \longrightarrow \{1, 2, ..., k-1\}$ dado por
$c(v_i) = \begin{cases} c'(u_i) & , si \quad c'(v_i) = c(u) \\ c'(v_i) & si \quad c'(v_i) \neq c(u) \end{cases}$

Así, c es una $k-1$-coloración de H, lo cual no es posible, pues $\chi(H) = k$

$$\Rightarrow \chi(G) = k+1$$

$\Rightarrow k+1 \in S$

Por el principio de inducción matemática se sigue que $S = \mathbb{N}$, por tanto

$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists\ G$ k-cromática y G es K_3-libre □

Definición 1.2.3. *Sea G una gráfica,*
G es ***perfecta*** *si y solo si* $\omega(G[V]) = \chi(G[V])\ \forall\ V \subseteq V(G)$

las siguientes afirmaciones, son evidentes:

Si $G = K_n$, *entonces* $\forall\ U \subseteq V(G)\ \omega(G[U]) = \chi(G[U])$, *esto es* K_n *es perfecta*

Si $G = \overline{K}_n$, *entonces* $\forall\ U \subseteq V(G)\ \omega(G[U]) = \chi(G[U])$, *esto es* $\overline{K}_n$ *es perfecta*

Teorema 1.2.4. *Sea G una gráfica,*
Si G es bipartita, entonces G es perfecta

Demostración. Sea G bipartita, $U \subseteq V(G)$ y $H = G[U]$,

Si $E(H) = \varnothing$, entonces $\omega(H) = 1 = \chi(H)$

Si $E(H) \neq \varnothing$, entonces $\omega(H) = 2 = \chi(G)$

Asi, $\omega(H) = \chi(H)$, por lo tanto

G es perfecta.

□

Teorema 1.2.5. *Sea G una gráfica,*
Si $\overline{G}$ *es bipartita, entonces G es perfecta*

Demostración. Sea G una gráfica t.q $\overline{G}$ es bipartita y sea $H = G[U]$ con $U \subseteq V(G)$

tomemos $n, l, k \in \mathbb{N}$ t.q $\omega(H) = l$, $\chi(H) = k$ y $|U| = n$

(1) $\overline{H}$ es bipartita, pues $\overline{G}$ es bipartita.

(2) $l \leq k$, por el corolario 1.1.1

Sea c una k-coloración de H y $V_1, V_2, ..., V_k$ las clases cromáticas inducidas por c.
Supongamos que $\exists\ i \in \{1, ..., k\}$ t.q $|V_i| \geq 3$, V_i , entonces
$\overline{H}$ contiene un triángulo, lo cual no es posible, por (1)

Por tanto. $\forall\ i \in \{1, 2, ..., k\}$ se tiene que $1 \leq |V_i| \leq 2$.

Sea $p = |\{V_i : |V_i| = 1, 1 \leq i \leq k\}|$ y $q = |\{V_i : |V_i| = 2, 1 \leq i \leq k\}|$, de esta manera se tiene que:

(a) $p + q = k$

(b) $p + 2q = n$

Sea $W = \bigcup\{V_i : |V_i| = 1, 1 \leq i \leq k\}$

Puesto que ninguna k-coloración de H tiene más de q clases cromáticas con dos vértices, entonces $\overline{H}$ tiene un acoplamiento maximal $\mathcal{M}$ con q aristas.

supongase que que $\exists\ w_1, w_2 \in W$ tales que $\{u, w_1\}, \{v, w_2\} \in E(\overline{H})$. Dado que $\overline{H}$ es libre de triángulos , se sigue que $w_1 \neq w_2$.

$\Rightarrow (\mathcal{M} - \{u, v\}) \cup \{\{u, w_1\}, \{v, w_2\}\}$ es un acoplamiento en $\overline{H}$ y $|(\mathcal{M} - \{u, v\}) \cup \{\{u, w_1\}, \{v, w_2\}\}| > |\mathcal{M}|$

lo cual no es posible, pues $\mathcal{M}$ es maximal.

Así $\forall\ \{u, v\} \in \mathcal{M}$ se tiene que $\nexists\ w_1 \in W$ t.q $\{u, w_1\} \in E(\overline{H})$ o $\nexists\ w_2 \in W$ t.q $\{v, w_2\} \in E(\overline{H})$.

Por lo tanto, H contiene un conjunto independiente de almenos $p + q = k$ vértices y así $\omega(H) = l \geq k$

$$\Rightarrow \omega(H) = \chi(H)$$

en conclución G es perfecta.

□

Teorema 1.2.6. ***(El teorema de las gráficas perfectas)***
Sea G una gráfica, G es perfecta si y solo si $\overline{G}$ es perfecta.

Definición 1.2.7. *Sea G una gráfica con $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$*
G es gráfica de intervalos si $\exists\ S = \{I_i = [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R} : a_i < b_i, 1 \leq i \leq n\}$ t. q $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ sii $I_i \cap I_j \neq \varnothing$

Teorema 1.2.8. *Si G es una gráfica de intervalos, entonces G es perfecta.*

Demostración. Sea G una gráfica de intervalos y $V \subseteq V(G)$,

$H = G[V]$ es una gráfica de intervalos, pues G es una gráfica de intervalos , digamos que $V(H) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$

$\exists\ S = \{I_i = [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R} : a_i < b_i, 1 \leq i \leq n\}$ t. q $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ sii $I_i \cap I_j \neq \varnothing$,
«se sigue de la definión de gráfica de intervalos »

Sin perdida de generalidad podemos suponer que $a_i \leq a_j$ si $i < j$, pues podemos reordenar a $V(H)$
$S = \{1, ..., n\}$
Sea $c : V(H) \longrightarrow S$ dado por

$c(v_1) = 1$,
para $2 \leq r \leq n$
$c(v_r) = \text{mín}\{j : j \in S \backslash \{c(v_i) : \{v_i, v_{r-1}\} \in E(G) \text{ y } 1 \leq i \leq r - 1\}$

sea $k = c(S)$, esto es c es una k-coloración de H, así $\chi(H) \leq k$.

Si $k = 1$, entonces $H = \overline{K_n}$ y $\chi(H) = \omega(H) = 1$.

Supongase que $k \geq 2$, sea $v_t \in V(h)$ t.q $c(v_t) = k$, de la definición de c se sigue que,

$\exists\ I_{j_1}, I_{j_2}, ..., I_{j_{k-1}}$ tales que $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_{k-1} \leq t$ así $a_{j_1} \leq a_{j_2} \leq .... \leq a_{j_{k-1}}$
y $I_{j_i} \cap I_t \neq \varnothing\ \forall\ i \in \{1, 2.., k - 1\}$, de esta manera tenemos que

$$a_t \in \bigcap_{i=1}^{k-1} I_{j_i} \cap I_t$$

Así para $U = \{v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_{j_{k-1}}, v_t\}$

$$H[U] = K_k$$

Entonces $\chi(H) \leq k \leq \omega(H)$ y dado que $\omega(H) \leq \chi(H)$

$$\Rightarrow \chi(H) = \omega(H)$$

Por tanto, G es perfecta. □

Definición 1.2.9. *Sea G una gráfica y C un ciclo en G*
*Si $u, v \in V(C)$ y $\{u, v\} \in E(G)$, $\{u, v\}$ es una **cuerda** de C si $\{u, v\} \notin E(C)$*

Definición 1.2.10. *Sea G una gráfica,*
*G es una gráfica **cordal** si $\forall\ C \leq G$ ciclo con $|V(C)| \geq 4$ tiene una cuerda.*

Si $G = K_n$, entonces G es cordal

Teorema 1.2.11. *Sea G una gráfica obtenida por la indentificación de dos subgráficas completas del mismo orden en dos gráficas G_1 y G_2.*
G es cordal $\Leftrightarrow$ G_1 y G_2 son cordales

Demostración. Sea G una gráfica obtenida por la indentificación de dos subgráficas completas del mismo orden en dos gráficas G_1 y G_2.

($\Rightarrow$) G es cordal
P.D que G_1 y G_2 son cordales
Dem.
Supongamos que G_1 no es cordal, entonces
$\exists\ C \leq G_1$ ciclo con $|V(C)| \geq 4$ y C no tiene cuerdas, pero $G_1 \leq G$

$$\Rightarrow C \leq G \Rightarrow G \text{ no es cordal, lo cual no es posible.}$$

Por tanto, G_1 es cordal, analogamente se obtiene que G_2 es cordal

($\Leftarrow$) G_1 y G_2 son cordales
P.D que G es cordal
Dem.
Sea $H_1 \leq G_1$ y $H_2 \leq G_2$ completas t.q $|H_1| = |H_2|$ y dado que G se obtiene indentificando los vértices de H_1 con los vértices de H_2, entonces G es cordal.

□

Teorema 1.2.12. *Una gráfica G es cordal si y solo si G puede ser obtenido identificando 2 subgráficas completas del mismo orden en dos gráficas cordales.*

Demostración. ($\Rightarrow$) G es cordal
P.D que G puede ser obtenido identificando 2 subgráficas completas del mismo orden en dos gráficas cordales
Dem.
Si $G = K_n$, entonces simplemente tomamos $G_1 = K_n = G_2$

Supongase que $G \neq K_n$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y G conexa

Sea $S \subseteq V(G)$ t.q $G - S$ es disconexa y $\forall\ S' \subseteq V(G)$ t.q $G - S'$ es disconexa, entonces $|S| \leq |S'|$

Sea G' una componentes conexa de $G - S$,
$V_1 = V(G')$ y $V_2 = V(G) - (V_1 \cup S)$, considerese las gráficas siguiente

$$G_1 = G[V_1 \cup S] \text{ y } G_2 = G[V_2 \cup S]$$

Evidentemente, G se obtiene identificando los vértices de S en G_1 y G_2. Mostremos que $G[S]$ es completa.

Si $|S| = 1$ no hay nada que hacer, supongase entonces que $|S| \geq 2$

Si existiese $v \in S$ t.q $\forall\ u \in V(G')$ (G'componente conexa de $G - S$) se tiene que $\{v, u\} \notin E(G)$, entonces

$S' = S - \{v\}$ es tal que $G - S'$ es disconexa, lo cual no es posible.

«Por la elección de S»

Por tanto, $\forall\ v \in S$ y $\forall\ G'$ componente conexa de $G - S$, $\exists u \in V(G')$ t.q $\{u, v\} \in E(G)$.

Sea $u, w \in S$, por lo anterior $\exists\ \mathcal{P}$ (u,w)-trayectoria en G_1 t.q $\forall\ v \in V(\mathcal{P})$ con $v \neq u$ y $v \neq w$ se tiene que $v \in V_1$, de esta manera digamos que

$\mathcal{P} = (u, x_1, ...x_s, w)$ con $x_i \in V_1$, $\mathcal{P}$ de longitud minima., de manera similar sea $\mathcal{P}' = (u, y_1, ...y_t, w)$ con $y_i \in V_2$, $\mathcal{P}$ de longitud minima en G_2, así

$$C = (u, x_1, ..., x_s, w, y_t, ..., y_1, u), \text{ es un ciclo con } |V(C)| \geq 4.$$

Por hipotesis, G es cordal $\Rightarrow \exists\ e \in E(G)$ t.q e es cuerda de C

Claramente $\{x_i, y_j\} \notin E(G)$, se sigue de la contrución que hemos hecho, y por la elección de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ se sigue que $\forall\ i \in \{1, .., s\}$ y $\forall j \in \{1, ..., t\}$ se tiene que $\{u, x_i\}, \{u, y_j\}, \{v, x_i\}, \{v, y_j\} \notin E(G)$

Por tanto, $\{u, w\} \in E(G)$, $\forall\ u, w \in S$

$$\Rightarrow G[S] \text{ es completa}$$

esto es, G puede ser obtenido identificando 2 subgráficas completas del mismo orden en dos gráficas cordales

($\Leftarrow$) Solo se aplica el teorema anterior.

$\square$

Corolario 1.2.13. *Sea G una gráfica,*
Si G es cordal, entonces G es perfecta

Demostración. Afirmación: $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y $\forall\ H$ gráfica cordal con $|V(H)| = n$ se tiene que $\chi(H) = \omega(H)$

(Procedemos por inducción)

definamos $S = \{n : \forall\ H \text{ cordal con } n = |V(H)|, \Rightarrow \chi(H) = \omega(H)\}$

(1) $1 \in S$, pues si H es cordal y $1 = |V(H)| \Rightarrow H = K_1$, así $\chi(H) = 1 = \omega(H)$

(2) Supongamos que $\{1, .., n\} \in S$
P.D que $n + 1 \in S$
Dem.
Sea H cordal y $|V(H)| = n+1$, por el teorema 1.2.7, H se obtiene de dos gráficas cordales G_1 y G_2 por la indentificación de dos subgráficas completas del mismo orden de G_1 y G_2

Observese primero que,

$$\chi(H) \leq \text{máx}\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}\text{=k}$$

Por hipotesis de inducción se sigue que $\chi(G_1) = \omega(G_1)$ y $\chi(G_2) = \omega(G_2)$, esto es

$$\chi(H) \leq \text{máx}\{\omega(G_1), \omega(G_2)\}\text{=k}$$

Sea $S \subseteq V(H)$ maximal,
entonces $H[S]$ es completa y $H[V(G_1) - S] \cap H[V(G_2 - S)] = \varnothing$ Así,

$$\omega(H) = \text{máx}\{\omega(G_1), \omega(G_2)\}\text{=k}$$

Pero, $\chi(H) \geq k \Rightarrow \chi(H) = k = \omega(H)$

Por lo tanto, $n + 1 \in S$

Por el principio de inducción se sigue que $S = \mathbb{N}$, en consecuencia $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y $\forall\ H$ gráfica cordal con $|V(H)| = n$ se tiene que $\chi(H) = \omega(H)$

Sea G cordal, obviamente $\forall\ H \leq G$ se tiene que H es cordal - - - - - - - - -($\star$)

Sea $U \subseteq V(G)$, por lo dicho antes, tenemos que $H = G[U]$ es cordal y por la afirmacion anterior, se sigue que $\chi(H) = \omega(H)$

Por lo tanto, G es perfecta. □

Definición 1.2.14. *Sea G una gráfica.*
Sea $v \in V(G)$, $N(v) := \{u \in V(G) : \{v, u\} \in E(g)\}$ y $N[v] := N(v) \cup \{v\}$

Definición 1.2.15. *Sea G una gráfica con $v \in V(G)$ y $v' \notin V(G)$, definimos*
$R_v(G) := (V, E)$, donde

$$V = V(G) \cup \{v'\}$$

$$E = E(G) \cup \{\{v', u\} : u \in N[v]\}$$

$R_v(G)$ se llama la gráfica de replica de G

Teorema 1.2.16. ***(Lema de replica)*** *Sea G una gráfica con $v \in V(G)$*
Si G es perfecta, entonces $R_v(G)$ es perfecta.

Demostración. Sea G perfecta y $G' = R_v(G)$
y sea $H \leq G'$ completa t.q $|V(H)| = \omega(G')$

(a) $v \in v(H)$, entonces $\omega(G') = \omega(G) + 1$, dado que

$$\chi(G) \leq \chi(G) + 1 = \omega(G) + 1 = \omega(G'), \text{ pues } G \text{ es perfecta}$$

Así, $\chi(G') = \omega(G')$

(b) $v \notin V(H)$, sea $k \in \mathbb{N}$ t.q $k = \omega(G)$, $k = \chi(G)$ pueS G es perfecta

Sea c una k-coloración de de G, sin perdida de generalidad supongamos que $c(v) = 1$

$V_1 = \{u \in V(G) : c(u) = 1\}$, $v \in V_1$

como $\omega(G) = k$ se sigue que $\exists!\ u \in H$ t.q $c(u) = j$, $\forall\ j \in \{1, 2, ..., k\}$, así $|V_1| \geq 2$

Sea $U_1 = V_1 - \{v\}$, claramente $\omega(G - U_1) = \omega(G) - 1 = k - 1$ y como G es perfecta, entonces $\chi(G - U_1) = k - 1$

Sea c' una $(k-1)$-coloración de $G - U_1$ (usando los colores $\{1, ..., k-1\}$).
Dado que V_1 es independiente, entonces $U_1 \cup \{v'\}$ también es independiente, asignemos el color k a los vértices de $U_1 \cup \{v'\}$, produciendo así una k-coloración de G', de manera que

$$k = \omega(G) \leq \omega(G') \leq \chi(G') \leq k$$

Por tanto, $\chi(G') = \omega(G')$

Sea $U \subseteq V(G')$ y $H = G'[U]$,(una nueva H)

Si $v' \in H$ pero $v \notin H \Rightarrow H \cong G[(V(H) - \{v'\}) \cup \{v\}]$, así $\chi(H) = \omega(H)$

Si $v, v' \in H$, pero $H \ncong G'$, entonces H es la gráfica de replicación de $G[V(H) - \{v'\}]$ y el argumento anterior muestra que $\chi(H) = \omega(H)$

Por lo tanto, G' es perfecta
El siguiente resultado, cuya demostración no se hará fue una conjetura que fue propuesta por Claude Berge en 1961 y fue demostrado en 2002 por Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas

□

Teorema 1.2.17. *Una gráfica G es perfacta si y solo si G ni $\overline{G}$ contienen un ciclo impar de longitud 5 o más.*

Capítulo 2

Cotas para el número cromático

En la sección anterior se introdujo el número cromático de una gráfica, y se vio que el número cromático lo podemos acotar tanto inferiormente como superiormente. El objetivo de esta sección es precisamente establecer algunas de esta cotas, acordes a gráficas en alguna familia en especifico.

2.1. Gráficas color-critica

Para cada gráfica k-cromática G y cada $v \in V(G)$ se tiene que $\chi(G-v) = k$ o $\chi(G-v) = k-1$, iguamlemente para cada $e \in E(G)$ tendremos que $\chi(G-e) = k$ o $\chi(G-e) = k-1$. Ademas si $e = \{u,v\}$ y $\chi(G-e) = k-1$, entonces $\chi(G-u) = k-1$ y $\chi(G-v) = k-1$.

Definición 2.1.1. *Sea G una gráfica y $E \subseteq E(G)$, definimos:*
$G[E] = (V,E)$, donde

$$V = \{u : \exists\ e \in E\ t.q\ u \in e\}$$

$G[E]$ se llama la gráfica inducida por E.

Definición 2.1.2. *Sea G una gráfica,*
*Si $\forall\ H \subset G$ se tiene que $\chi(H) < \chi(G)$, entonces diremos que G es **color-critica**.*

Definición 2.1.3. *Sea G una gráfica,*
Si G es color-critica y k-cromática, entonces diremos que G es k-critica.

Proposición 2.1.4. *G es 2-critica si y solo si $G = K_2$*

Demostración. Sea G una gráfica

($\Rightarrow$) G es 2-critica.
$\Rightarrow$ G es color-critica y 2-cromática $\Rightarrow |V(G)| \geq 2$ y $|E(G)| \geq 1$

Si $|E(G)| \geq 2$ o $|V(G)| \geq 3$, entonces sea $e \in E(G)$

$$\Rightarrow H = G[\{e\}] \subset G \text{ y } \chi(H) = \chi(G) \Rightarrow G \text{ no es color-critical}$$

lo cual es imposible, pues G es 2-critica (por hipotesis).

Por lo tanto, $|E(G)| = 1$ y $|V(G)| = 2$, esto es $G = K_2$

($\Leftarrow$) $G = K_2$.
$\Rightarrow G$ es 2-cromática y claramente es color-critica,
por lo tanto, G es 2-critica

□

Proposición 2.1.5. *G es 3-critica si y solo si $G = C_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ impar*

Demostración. Sea G una gráfica

($\Rightarrow$) G es 3-critica.
$\Rightarrow G$ es color-critica y 3-cromática

Supongase que G es disconexa, entonces $\exists$ H componente conexa de G t.q $\chi(H) = \chi(G)$ y $H \subset G$, esto no es posible pues G es color-critica.

Por tanto G es conexa.

Si G no contiene ciclos de longitud impar, entonces G es bipartita,

$$\Rightarrow \chi(G) = 2.$$

Esto tampoco es posible, pues G es 3-cromática.

Sea entonces $C_n \subseteq G$ $n \in \mathbb{N}$ impar

Afirmo: $C_n = G$. Pues, si $C_n \subset G$, y dado que $\chi(C_n) = 3 \Rightarrow \chi(C_n) = \chi(G)$,
esto es G no es color-critica, lo cual no es posible.

por lo tanto, $C_n = G$

($\Leftarrow$) $G = C_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ impar.
$\Rightarrow G$ es 3-cromática
Sea $H \subset C_n$
$\exists$ $v \in V(C_n)$ t.q $v \notin V(H)$ o bien $\exists$ $e \in E(G)$ t.q $e \notin E(H)$, en cualquier caso se tiene que $\chi(H) \leq 2$, pues G es un ciclo.

$$\Rightarrow \chi(H) < \chi(G), \text{ por tanto } G \text{ es color-critica.}$$

Por tanto, G es 3-critica

□

Proposición 2.1.6. *K_n es n-critical* $\forall$ $n \geq 2$

Demostración. Sabemos que $\chi(K_n) = n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, es decir, K_n es n-cromática.

Sea $H \subset K_n \Rightarrow \exists$ $v \in V(K_n)$ tal que $v \notin V(H)$ o bien $\exists$ $e \in E(K_n)$ tal que $e \notin E(H)$.

Si $\exists$ $v \in V(K_n)$ tal que $v \notin V(H)$, entonces

$$|V(H)| \leq n-1 \Rightarrow \chi(H) \leq n-1 \Rightarrow \chi(H) < \chi(K_n)$$

Observese que $\chi(K_n \backslash \{e\}) = n - 1$

Si $\exists\ e \in E(K_n)$ tal que $e \notin E(H)$, entonces

$$H \subseteq K_n \backslash \{e\} \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(K_n \backslash \{e\}) \Rightarrow \chi(H) < \chi(K_n)$$

Por lo tanto, $\chi(H) < \chi(K_n)\ \forall\ H \subset K_n$, es decir K_n es color-cromatica.

De esta manera se tiene que, K_n es n-critica. □

las proposiciones 2.1.1 y 2.1.2 nos dan una caracterización de las gráficas 2-critica y 3-critica, pero en general no existe una caracterización para gráficas k-criticas con $k \geq 4$.

Sea G una gráfica k-cromática donde $k \geq 2$ y supongase que $H \subseteq G$ con H k-cromática de tamaño mínimo que no tiene vértices aislados. Entonces para cada subgráfica propia F de H se tiene que $\chi(F) < \chi(H)$, esto es H es k-critica. De esta observación se sigue que cada gráfica k-cromática contiene a unas subgráfica k-critica.

Definición 2.1.7. *Sea G una gráfica, si $\forall\ E \subseteq E(G)$ con $|E| < l$ se tiene que $G - E$ es conexa, entonces diremos que G es l-conexa por aristas.*

Definición 2.1.8. *Sea G una gráfica, definimos la conexidad por aristas por:*

$\lambda(G) = \text{máx}\{l : G \text{ es } l\text{-conexa } \}$

Teorema 2.1.9. *Sea G una gráfica y $k \geq 2$.*
Si G es k-critica, entonces G es $(k-1)$-conexa por aristas.

Demostración. Sea G una gráfica k-critica con $k \geq 2$.

para $k = 2$ y $k = 3$, el resulrado es evidente, se sigue de las proposiciones 2.1.1 y 2.1.2.
Así, supongamos que $k \geq 4$

Supongase que $\exists\ G$ k-critica tal que G no es $(k-1)$-conexa por arista,

$\Rightarrow \exists\ \{V_1, V_2\}$ partición de V(G) t.q $|E'| \leq k - 2$, donde
$E' = \{\{v_1, v_2\} \in E(G) : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$

Sea $G_1 = G[V_1]$ y $G_2 = G[V_2]$, dado que G es k-critica, entonces

G_1 y G_2 son $(k-1)$-coloreable

Sea c_1 y c_2 $(k-1)$-coloraciones de G_1 y G_2, respectivamente

Sea $U_1, U_2, ..., U_t$ las clases cromáticas de G_1 inducidas por c_1 tales que $\exists\ v_i \in U_i$ y $\{v_i, v\} \in E'$ para algún $v \in V_2$.

denotemos por $k_i = |\{\{v_i, v\} \in E' : v_i \in U_i, v \in V_2\}|$, $k_i \geq 1\ \forall\ i \in \{1, ..., t\}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{t} k_i \leq k - 2$$

Si $\forall\ u_1 \in U_1$ se tiene que $c_1(u_1) \neq c_2(v)$ si $v \in V_2 \cap N(u_1)$, entonces el color de los vecinos de U_1 lo dejamos fijo.

Si por otro lado, $\exists\ u_1 \in U_1$ tal que $c_1(u_1) = c_2(v)$ para algún $v \in V_2 \cap N(u_1)$, entonces

Sea $\pi \in S_{k-1}$ tal que $\forall\ u_1 \in U_1$ se tenga que $\pi(c_1(u_i)) \neq c_2(v)$, $\forall\ v \in V_2 \cap N(u_1)$
esta permutación existe pues $k - 1 - k_1 \geq 1$

Basta observar que $(k-1) - \sum_{i=1}^{t} k_i \geq 1$, entonces podemos aplicar el proceso anterior para $U_2, ..., U_t$ como este proceso es finito y nos genera una $(k-1)$-coloración de G

$$\Rightarrow \chi(G) \leq k - 1, \text{ lo cual no es posible, pues } G \text{ es } k\text{-critica}$$

Por lo tanto, G es $(k-1)$-conexa por aristas. □

Corolario 2.1.10. *$\forall\ G$ color-critica se tiene que $\chi(G) < 1 + \lambda(G)$*

Teorema 2.1.11. *Sea G una gráfica.*

$$\chi(G) \leq 1 + \text{máx}\{\lambda(H) : H \subseteq G\}$$

Demostración. Sea $F \subseteq G$ color-critica tal que $\chi(G) = \chi(F)$. Por el Corolario 2.1.1 se sigue que:

$$\chi(G) = \chi(F) \leq 1 + \lambda(F) \leq 1 + \text{máx}\{\lambda(H) : H \subseteq G\}$$

□

Dado que el grado mínimo de una gráfica nunca excede la conexidad por aristas, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.1.12. *Si G es color-critica, entonces*

$$\chi(G) \leq 1 + \delta(G)$$

Teorema 2.1.13. *Sea G conexa, $n, k \in \mathbb{N}$ con $2 \leq k \leq n$.*
Si $|V(G)| = n$ y $\chi(G) = k$, entonces el mínimo tamaño de G es $\binom{n}{k} + (n-k)$.

Demostración. Sea G conexa $n, k \in \mathbb{N}$ con $2 \leq k \leq n$ tales que $|V(G)| = n$ y $\chi(G) = k$ y considerese $H \subseteq G$ tal que H es k-critica.

Sea $p = |V(H)|$, tenemos que $k \leq p \leq n$. G contiene $n - p$ vértices que no están en H. Por lo tanto, existen al menos $n - p$ aristas de G que no estan en H.

Ahora H es k-critica, entonces $\delta(H) \geq k - 1$. Así $|E(H)| \geq \frac{p(k-1)}{2}$

$$\Rightarrow |E(G)| \geq \frac{p(k-1)}{2} + (n-p) = p(\tfrac{k-1}{2} - 1) + n \geq k(\tfrac{k-1}{2} - 1) + n = \binom{n}{k} + (n-k).$$

Consideremos la trayectoria $P_{n-k+1} = (x_0, x_1, ..., x_{n-k})$ y la gráfica completa K_k tal que $x_0 \in V(K_k)$ y $x_i \notin V(K_k)$ para $i \in \{1, ..., n-k\}$, definamos la gráfica G como sigue,

$G = (V, E)$, donde:

$V = V(P_{n-k+1}) \cup V(K_k)$

$E = E(P_{n-k+1}) \cup E(K_k) \cup \{\{u, x_0\} : u \in V(K_k)\}$

Claramente $|V| = n$ y $|E| = \binom{k}{2} + (n-k)$ y $\chi(G) = k$, en consecuencia

$$\text{el mínimo tamaño de } G \text{ es } \binom{k}{2} + (n-k) \text{ y } \chi(G) = k.$$

□

Teorema 2.1.14. *Sea G una gráfica tal que $G \neq K_k$ y $k \geq 3$.*
Si G es k-critica y S es un conjunto de vértices de corte de G, entonces $G[S]$ no es un clan.

Demostración. Sea $G \neq K_k$, G k-critica con $k \geq 3$ y $S \subseteq V(G)$ vértices de corte.
Claramente $|S| \geq 2$.

Sea $H_1, H_2, ..., H_s$ las componentes conexas de $G - S$ y consideremos
$G_i = G[V(H_i) \cup S]$ para $i = 1, 2..., s$

Dado que $G_i \subset G \Rightarrow \chi(G_i) \leq k - 1$, $\forall\ i = 1, 2, ..., s$, de esta manera,

$\exists\ c_i$ $(k-1)$-coloración de G_i $\forall\ i \in \{1, 2, ..., s\}$.

Supongase que $\forall\ u, v \in S$, $\forall\ i \in \{1, 2, ..., s\}$ se cumple $c_i(u) \neq c_i(v)$, entonces

evidentemente podemos dar una $(k-1)$-coloración de G (permutando los colores de S si es necesario), pero esto es imposible, pues $\chi(G) = k$.

Así, $\exists\ u, v \in S$ y $\exists\ i \in \{1, 2, ..., s\}$ tal que $c_i(u) = c_i(v)$,

$$\Rightarrow \{u, v\} \notin E(G)$$

Por lo tanto, $G[S]$ no es un clan. □

Corolario 2.1.15. *Sea G k-critica tal que $G \neq K_k$, $k \geq 3$, donde $\kappa(G) = 2$.
Si $S = \{u, v\}$ es un conjunto de vértices de corte de G, entonces $\{u, v\} \notin E(G)$ y $\exists\ G' = G[V(H) \cup S]$ tal que $\chi(G' + \{u, v\}) = k$, H es componente conexa de $G - S$.*

Demostración. Si $S = \{u, v\}$, entonces $\{u, v\} \notin E(G)$, esto es por el teorema anterior.
Como se vio en la demostración del teorema previo $\exists\ H$ componente conexa de $G - S$, tales que si c es una *(k-1)-coloración* de $G' = G[V(H) \cup S]$, entonces $c(u) \neq c(v)$

$$\Rightarrow \chi(G' + \{u, v\}) = k$$

□

2.2. Cotas superiores para el número cromático

Teorema 2.2.1. *Sea G una gráfica. Si $|V(G)| = n$, entonces*

$$\chi(G) \leq \lfloor \tfrac{n+\omega(G)}{2} \rfloor$$

Demostración. Sea $S = \{r \in \mathbb{N}_0 : \forall\ G \text{ t.q. } |V(G)| - \omega(G) = r \Rightarrow \chi(G) \leq \lfloor \frac{|V(G)|+\omega(G)}{2} \rfloor\}$

(1) Sea G tal que $|V(G)| - \omega(G) = 0 \Rightarrow G = K_{|V(G)|}$

$$\Rightarrow \chi(G) = \omega(G) \text{ y } \chi(G) = |V(G)| \Rightarrow \chi(G) \leq \lfloor \tfrac{|V(G)|+\omega(G)}{2} \rfloor\}$$

Por tanto, $0 \in S$

(2) Supongamos que $\{0, ..., r\} \subseteq S$
P.D.que $r + 1 \in S$
Dem.
Sea G tal que $|V(G)| = n$ y $n - \omega(G) = r + 1$.
Si $r = 0$, entonces

$$\chi(G) = n - 1 = \omega(G) = \lfloor \tfrac{n+\omega(G)}{2} \rfloor$$

supongase ahora que $r \geq 1 \Rightarrow G$ no es completa.

$\exists\, u, v \in V(G)$ tales que $\{u, v\} \notin E(G)$, sea $H = G - u - v$, claramente $|V(H)| = n-2$ y $\omega(H) = \omega(G)$ o $\omega(H) = \omega(G) - 1$, en cualquier caso tenemos:

$$0 \leq (n-2) - \omega(H) < r + 1$$

Por hipotesis de inducción se sigue que $\chi(H) \leq \lfloor \frac{n-2+\omega(H)}{2} \rfloor$.

Sea $\lfloor \frac{n-2+\omega(H)}{2} \rfloor$-coloración de H asignamos un nuevo y el mismo color a u y v, de esta manera

$$\chi(G) \leq \lfloor \tfrac{n-2+\omega(H)}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \tfrac{n+\omega(H)}{2} \rfloor \leq \lfloor \tfrac{n+\omega(G)}{2} \rfloor$$

por tanto, $r + 1 \in S$

De (1) y (2) y por el principio de inducción se concluye que $S = \mathbb{N}$, esto es

$$\forall\ G \text{ t.q. } |V(G)| = n \Rightarrow \chi(G) \leq \lfloor \tfrac{n+\omega(G)}{2} \rfloor\}$$

□

Un algoritmo glotón de coloración

Supongase que $V(G) = \{v_1, v_2, .., v_n\}$ *de una gráfica* G. *Definamos una* c*-coloración de* G *como sigue:*

(a) $c(v_1) = 1$

(b) $c(v_{j+1}) = \min \mathcal{C}_j$ *donde* $\mathcal{C}_j = \{1, 2, ..., n\} \backslash \{c(v_i) : \{v_i, v_{j+1}\} \in E(G), 1 \leq i \leq j\}$ *y* $1 \leq j < n$.

Definición 2.2.2. *Sea* G *una gráfica, definimos el grado máximo de* G *como:*

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V(G)\}$$

Teorema 2.2.3. *Sea* G *una gráfica.*

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$$

Demostración. Sea G tal que $|V(G)| = n$ y digamos que $V(G) = \{v_1, v_2, .., v_n\}$.
tomemos c-coloración de G exactamente como el algoritmo glotón, esto es:

(a) $c(v_1) = 1$

(b) $c(v_{j+1}) = \min \mathcal{C}_j$ donde $\mathcal{C}_j = \{1, 2, ..., n\} \backslash \{c(v_i) : \{v_i, v_{j+1}\} \in E(G), 1 \leq i \leq j\}$ y $1 \leq j < n$.

Evidentemente $\forall\ j \in \{1, 2, .., n\}$ se tiene que $c(v_j) \leq 1 + d_G(v_j)$, en consecuencia.

$$\chi(G) \leq \max\{1 + d_G(v_j) : 1 \leq j \leq n\} = 1 + \Delta(G)$$

Por lo tanto, $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ □

Teorema 2.2.4. *Para cada gráfica* G*,*

$$\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \subseteq G\}$$

Demostración. Sea G una gráfica, $F \subseteq G$ y $\chi(G) = k$ tales que F es k-critica.

Por el corolario 3.0.2, se sigue que, $\chi(F) \leq 1 + \delta(F)$, entonces

$$\chi(F) - 1 \leq \delta(F) \leq \max\{\delta(H) : H \subseteq G\}$$

Dado que $\chi(G) = \chi(F)$, se sigue que:

$$\chi(G) \leq 1 + \text{máx}\{\delta(H) : H \subseteq G\}$$

□

Teorema 2.2.5. *Sea G con $|V(G)| = n$ y $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.*
Supongase que $d_G(v_1) \geq d_G(v_2) \geq ... \geq d_G(v_n)$, entonces

$$\chi(G) \leq 1 + \min_{1 \leq i \leq n} \{\text{máx}\{i-1, d_G(v_i)\}\} = \min_{1 \leq i \leq n} \{\text{máx}\{i, 1 + d_G(v_i)\}\}$$

Demostración. Sea G tal que $\chi(G) = k$ y sea $H \subseteq G$ tal que H es k-critica. Dado que $|V(H)| \geq k$ y por el corolario 3.0.2 tenemos $k \leq 1 + \delta(H)$, en consecuencia

$$\text{máx}\{i, 1 + d_G(v_i\} \geq k, \ \forall \ i \in \{1, .., k\}$$

mientras que para $k + 1 \leq i \leq n$ tenemos,

$$\text{máx}\{i, 1 + d_G(v_i\} \geq k + 1$$

Por lo tanto,

$$\chi(G) \leq \min_{1 \leq i \leq n} \{\text{máx}\{i, 1 + d_G(v_i\}\}$$

□

Teorema 2.2.6. *Sea G una gráfica. Si $n = |V(G|$ y $m = |E(G)|$, entonces*

$$\chi(G) \geq \tfrac{n^2}{n^2 - 2m}$$

Demostración. Sea G tal que $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$ y $\chi(G) = k$

Sea c una k-coloración de G y $V_1, V_2, ..., V_k$ las clases cromáticas indicudas por c y sea $n_i = |V_i|$, $i = 1, 2, ..., n$.

El máximo tamaño de G es cuando $G = K_{n,k}$ de esta manera, se tiene que:

$$\Rightarrow m \leq \tbinom{k}{2} \tfrac{n^2}{k^2} \Rightarrow 2m \leq \tfrac{(k-1)n^2}{k}$$

En consecuencia,

$$\tfrac{n^2}{n^2 - 2m} \leq \tfrac{n^2}{n^2 - \frac{(k-1)n^2}{k}} = k = \chi(G)$$

□

Antes de demostrar el siguiente teorema recuerdese que $\forall \ a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que :

$$ab \leq (\tfrac{a+b}{2})^2$$

Teorema 2.2.7. ***(Nordhaus-Gaddum)***
Sea G una gráfica con $|V(G)| = n$. Tenemos que :

(i) $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$

(ii) $n \leq \chi(G)\chi(\overline{G}) \leq (\tfrac{n+1}{2})^2$

Demostración. Sea G una gráfica con $|V(G)| = n$, $\chi(G) = k$ y $\chi(\overline{G}) = l$.

Sea c una k-coloración de G y $\overline{c}$ una l-coloración de $\overline{G}$, asociemos a cada vértice $u \in V(G) = V(\overline{G})$ el par ordenado $(c(u), \overline{c}(u))$ y al par ordenado lo consideramos como un color.

Si $(c(u), \overline{c}(u)) = (c(v), \overline{c}(v))$, entonces

$$\begin{cases} c(u) = c(v) \\ \overline{c}(u) = \overline{c}(v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \{u, v\} \notin E(G) \\ \{u, v\} \notin E(\overline{G}) \end{cases} \Leftrightarrow u = v$$

De esta manera, tendremos una coloración de K_n con a lo mas kl colores, pues $|\{(c(u), \overline{c}(u)) : u \in V(G)\}| = kl$

$$\Rightarrow n = \chi(K_n) \leq kl = \chi(G)\chi(\overline{G})\text{- - - - - - - - - - - } (*)$$

De $(*)$ se sigue que $\sqrt{n} \leq \sqrt{\chi(G)\chi(\overline{G})} \leq \frac{\chi(G)+\chi(\overline{G})}{2}$

$$\Rightarrow 2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G})\text{- - - - - - - - - - - - } (**)$$

Sea $p = \max\{\delta(H) : H \subseteq G\}$, del teorema 3.0.3 se sique $\chi(G) \leq 1 + p$.

Supongase que $\exists\ H \subseteq G$ tal que $\delta(\overline{H}) \geq n - p$. Así $\forall\ u \in V(H)$ se tiene que $d_H(u) \leq p - 1$.
Sea $F \subseteq G$ tal que $\delta(F) = p$ esto implica que $\forall\ v \in V(F)$, $v \notin V(H)$. Dado que $|V(F)| \geq p + 1$ se sigue que $|V(H)| \leq n - p$, esto contradice el echo de que $\delta(\overline{H}) \geq n - p$.

Por lo tanto $\forall\ \overline{H} \subseteq \overline{G}$ se tiene que $\delta(\overline{H}) \leq n - p - 1$. En virtud del teorema 3.0.3 se obtiene que $\chi(\overline{G}) \leq 1 + (n - p - 1) = n - p$, así

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq (1 + p) + (n - p) = n + 1 \text{ - - - - - - - - - - - } (***)$$

De $(*)$, $(**)$ y $(***)$ se concluye (i) y (ii). □

Teorema 2.2.8. *Sea $n \in \mathbb{N}$.*
Si $a, b \in \mathbb{N}$ cumplen:

(i) $2\sqrt{n} \leq a + b \leq n + 1$

(ii) $n \leq ab \leq (\frac{n+1}{2})^2$

entonces,
$\exists$ G gráfica tal que $|V(G)| = n$, $\chi(G) = a$ y $\chi(\overline{G}) = b$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{N}$ cumplen $(i) - (ii)$.

Sean $n_1, n_2, ..., n_a \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_a = b$ y

$$\sum_{i=1}^{a} n_i = n.$$

Dado que $a + b - 1 \leq n \leq ab$, tales enteros $n_i(1 \leq i \leq a)$existen.

Así $G = K_{n_1,n_2,...,n_a}$ tiene orden n y $\overline{G} = K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup .. \cup K_{v_a}$, claramente $\chi(G) = a$ y $\chi(\overline{H}) = b$ □

Definición 2.2.9. *Sea G una gráfica y $u, v \in V(G)$.*

$$\mathfrak{B}(u, v) = \{T : T \textit{ es } (u, v)\textit{-trayectoria en } G\ \}$$

Definición 2.2.10. *Sea G una gráfica, definimos las distancia de 2 vértices como sigue:*

$$L_G(u,v) = \begin{cases} n & si \quad \mathfrak{B}(u,v) \neq \varnothing \\ \infty & si \quad \mathfrak{B}(u,v) = \varnothing \end{cases}$$

Donde:

$$n = \min_{T \in \mathfrak{B}(u,v)} \{|E(T)|\}$$

Teorema 2.2.11. ***Brook's***
Sea G conexa, si G no es un ciclo impar y tampoco la completa, entonces

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

Demostración. Sea G conexa tal que G no es un ciclo impar y tampoco la completa.
$\chi(G) = k \geq 2$ pues G es conexa. Sea $H \subseteq G$ tal que H es k-critica.

Así H es 2-conexa y $\Delta(H) \leq \Delta(G)$.

Si $H = K_k$ o H es un ciclo de tamaño impar, entonces $G \neq H$ y dado que G es conexa, se tiene que $\Delta(G) \geq k$ si $H = K_k$ y $\Delta(G) \geq 3$ si H es un ciclo impar.

Si $H = K_k$, entonces $\chi(H) = \chi(G) \leq \Delta(G)$.

Si H es un ciclo impar, entonces $3 = \chi(H) = \chi(G) \leq \Delta(G)$.

en ambos casos se tiene que $\chi(G) \leq \Delta(G)$, supongase a partir de aquí que H es k-critica, pero $H \neq K_k$ y H no es un ciclo de tamaño impar.

$$\Rightarrow k \geq 4$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = |V(H)|$, es claro que $n > k$, pues $\chi(H) = k$ y H no es completa y así $n \geq 5$. Ahora, H es 2-conexa, así H es 3-conexa o $\kappa(H) = 2$, consideremos entonces 2 casos:

(1) H es 3-conexa.
Dado que $H \neq K_k$, entonces $\exists\, u, v \in V(H)$ tal que $L_H(u,v) = 2$, sea $T \in \mathfrak{B}(u,v)$ tal que $|E(T)| = 2$, digamos que $T = (u, v, w)$.
$H - u - w$ es conexa, pues H es 3-conexa.
nombremos los vértices de $H - u - w$ como sigue:

$V(H - u - w) = \{v = u_1, u_2, .., u_{n-2}\}$ tal que $\{u_i, u_{i+1}\} \in E(H - u - w)$, $\forall\ i = 1, 2, ..., n-3$. Sea $u_{n-1} = u$ y $u_n = w$, de esta manera:

$$U_j = \{u_1, u_2 ..., u_j\},\ 1 \leq j \leq n \Rightarrow H[U_j] \text{ es conexa}$$

Ahora, aplicamos el algoritmo glotón de coloración a H, respecto al orden inverso, es decir

$$w = u_n, u = u_{n-1}, u_{n-2}, ..., u_2, u_1 = v$$

Sea c la coloración del algoritmo glotón, dado que $\{w, u\} \notin E(H)$, entonces $c(w) = 1 = c(u)$.
Dado que $\forall\ j \in \{2, ..., n-2\}$ se tiene que $\{u_j, u_{j-1}\} \in E(H)$ esto es u_j tiene a lo mas $\Delta(H) - 1$ vecinos que lo preceden, por tanto $c(u_j) \in \{1, 2, ..., \Delta(H)\}$.
Por ultimo, tenemos $\{u_1, u_n\}, \{u_1, u_{n-1}\} \in E(H)\}$, entonces u_1 tiene a lo mas $\Delta(H)$ vecinos precedentes diferentes de u_n y u_{n-1} y dado que $c(u_n) = 1 = c(u_{n-1})$ se sigue que $c(u_1) \in \{1, 2, ..., \Delta(H)\}$.
Esto es c es una $\Delta(H)$-coloración, así

$$\chi(H) \leq \Delta(H)$$

Por lo tanto,

$$\chi(G) = \chi(H) \leq \Delta(H) \leq \Delta(G)$$

(2) $\kappa(H) = 2$.
Supongamos que $\forall\ u \in V(H)$ se tiene que que $d_H(u) = 2$ o $d_H(u) = n-1$ y dado que $\chi(H) \geq 4$ si obtiene que,

$$H = K_1 + (\tfrac{n-1}{2})K_2 \text{ o } H = K_{1,1,n-2}$$

En ambos casos $\chi(G) = 3$, lo cual es imposible, pues H es k-critica.

Por tanto, $\exists\ x \in V(H)$ tal que $2 < d_H(x) < n-1$.

Como $\kappa(H) = 2$, se sigue que $\kappa(H-x) = 2$ o $\kappa(H-x) = 1$.
Si $\kappa(H-x) = 2$, entonces $\exists\ y \in V(H)$ t.q $L_H(x,y) = 2$, así tomamos $u = x$ y $w = y$ y aplicamos el caso anterior (1). Así,

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Finalmente, si $\kappa(H-x) = 1$. En consecuencia, $H-x$ contiene 2 bloques finales, digamos B_1 y B_2 que contienen vértices de corte x_1 y x_2 respectivamente, de $H-x$.

Dado que H es 2-conexa, entonces $\exists\ y_1 \in V(B_1) - \{x_1\}$ y $y_2 \in V(B_2) - \{x_2\}$ tal que $\{x, y_1\}, \{x, y_2\} \in E(H)$. Tomamos $u = y_1$, $w = y_2$ y procedemos como en (1), de esta manera:

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Por lo tanto, $\forall\ G$ conexa que no es completa y no es un ciclo impar, se tiene que

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

□

Conjetura 2.2.12. ***Reed's***
$\forall\ G$ gráfica se tiene,

$$\chi(G) \leq \tfrac{\omega(G)+1+\Delta(G)}{2}$$

Teorema 2.2.13. *Sea G una gráfica tal que $|V(G)| = n$,*

$$\chi(G) \leq \tfrac{\omega(G)+n+1-\alpha(G)}{2}$$

Demostración. Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : \forall\ G \text{ con } |V(G)| = n \Rightarrow \chi(G) \leq \tfrac{\omega(G)+n+1-\alpha(G)}{2}\}$.

(1) Es evidente que $1 \in S$.

(2) Supongamos que $\{1, 2, .., n\} \subseteq S$.
P.D.que $n+1 \in S$
Dem.
Sea G una gráfica con $|V(G)| = n+1$.
Si $G = \overline{K_{n+1}}$, entonces $\chi(G) = \omega(G) = 1$ y $\alpha(G) = n+1$,

$$\Rightarrow \chi(G) = \tfrac{\omega(G)+(n+1)+1-\alpha(G)}{2}\}.$$

Supongase que $G \neq \overline{K_{n+1}}$. Así $1 \leq \alpha(G) \leq n$. Sea $V_0 \subseteq V(G)$ un conjunto independiente maximal. De manera que $|V_0| = \alpha(G)$.

Sea $G_1 = G - V_0$, $\alpha(G_1) = \alpha_1$, $\omega(G_1) = \omega_1$ y $V_1 = V(G_1)$. Observese que $V_1 = n + 1 - \alpha(G)$.

Caso(1) Si G_1 es completa, entonces
$V(G) = V_0 \cup V_1$, $G[V_0] = \overline{K_{\alpha(G)}}$ y $G[V_1] = K_{(n+1)-\alpha(G)}$.Por lo tanto, $\chi(G) = \omega(G) = (n+1) - \alpha(G)$ o $\chi(G) = \omega(G) = (n+1) - \alpha(G) + 1$.

(1,1) Si $\chi(G) = \omega(G) = (n+1) - \alpha(G)$, entonces

$$\chi(G) = \frac{(n+1)-\alpha(G)+(n+1)-\alpha(G)}{2} = \frac{\omega(G)+(n+1)-\alpha(G)}{2} < \frac{\omega(G)+(n+1)+1-\alpha(G)}{2}$$

(1,2) Si $\chi(G) = \omega(G) = (n+1) - \alpha(G) + 1$, entonces

$$\chi(G) = \frac{(n+1)-\alpha(G)+1+(n+1)-\alpha(G)+1}{2} = \frac{\omega(G)+(n+1)+1-\alpha(G)}{2}$$

Caso(2) G_1 no es completa. En este caso $\alpha_1 \geq 2$. Dado que $\chi(G) \leq \chi(G_1) + 1$ y por hipotesis de inducción, se sigue que

$$\begin{aligned}\chi(G) &\leq \frac{\omega_1+((n+1)-\alpha(G))+1-\alpha_1}{2} + 1 \leq \frac{\omega(G)+((n+1)-\alpha(G))+1-\alpha_1}{2} + 1 \\ &\leq \frac{\omega(G)+(n+1)+1-\alpha(G))}{2}\end{aligned}$$

En base al todo lo anterior, se concluye que $n + 1 \in S$

De $(1) - (2)$ y el principio de inducción se concluye que $S = \mathbb{N}$, en consecuencia

$$\forall\ G \text{ con } |V(G)| = n \text{ se tiene que } \chi(G) \leq \frac{\omega(G)+n+1-\alpha(G)}{2}.$$

$\square$

Capítulo 3

Gráficas circulantes

En esta sección se cupondra el manejo de la aritmética del anillo $\mathbb{Z}_n$ y algunos resultados elementales de la teoría de números .

Definición 3.0.1. *Sea G una gráfica.*
*G es **circulante** si $\exists\ n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}_n \backslash \{0\}$, tal que :*

$$V(G) = \mathbb{Z}_n$$

$$E(G) = \{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{Z}_n, y - x \in \mathcal{J}\}$$

y a G lo denotaremos como $C_n(\mathcal{J})$.

Proposición 3.0.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $G = C_n(\mathcal{J})$ una gráfica circulante.*
Se tiene que $E(G) = \{\{x, x + a\} : x \in \mathbb{Z}_n, a \in \mathcal{J}\} = \{\{x, x - a\} : x \in \mathbb{Z}_n, a \in \mathcal{J}\}$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, $G = C_n(\mathcal{J})$ una gráfica circulante. Por definición tenemos que $\{x, y\} \in E(G)$ $\Leftrightarrow y - x \in \mathcal{J}$.

($\subseteq$) Sea $\{x, y\} \in E(G)$.
Tenemos que $y - x \in \mathcal{J} \Rightarrow \exists\ a \in \mathcal{J}$ tal que, $y - x = a \Rightarrow y = x + a$.
Así, $\{x, y\} = \{x, x + a\} \in \{\{x, x + a\} : x \in \mathbb{Z}_n, a \in \mathcal{J}\}$.

Por lo tanto, $E(G) \subseteq \{\{x, x + a\} : x \in \mathbb{Z}_n, a \in \mathcal{J}\}$

($\supseteq$) Sea $\{x, x + a\} \in \{\{x, x + a\} : x \in \mathbb{Z}_n, a \in \mathcal{J}\}$.
Como $(x + a) - x = a \in \mathcal{J}$, entonces $\{x, x + a\} \in E(G)$

Por lo tanto, $E(G) \supseteq \{\{x, x + a\} : x \in \mathbb{Z}_n, a \in \mathcal{J}\}$

En consecuencia, $E(G) = \{\{x, x + a\} : x \in \mathbb{Z}_n, a \in \mathcal{J}\}$.

Analogamente y del hecho de que $\{x, y\} = \{y, x\}$ se sigue que

$E(G) = \{\{x, x - a\} : x \in \mathbb{Z}_n, a \in \mathcal{J}\}$ □

De la proposición 3.0.2 se sigue que si $G = C_n(\mathcal{J})$ es una gráfica circulante, entonces $E(G) = \{\{x, x \pm a\} : x \in \mathbb{Z}_n, a \in \mathcal{J}\}$

Proposición 3.0.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$.*
$\forall\ a \in \mathbb{Z}_n$, si $b \in \mathbb{Z}_n$ es tal que $a + b = 0$ y $a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces $b \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{Z}_n$ tal que $a + b = 0$ y $a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
Supongamos que $b < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces se tiene que

$$a + b < 2\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor < 2(\tfrac{n}{2}) = n \Rightarrow a + b \neq 0 \text{ lo cual no es posible.}$$

por lo tanto $b \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. □

Proposición 3.0.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $G = C_n(\mathcal{J})$ una gráfica circulante.*
Si $\exists\ a, b \in \mathcal{J}$ tal que $a + b = 0$, entonces $\forall\ x \in \mathbb{Z}_n = V(G)$ se tiene que
$\{\{x, x + a\}, \{x, x - a\}\} = \{\{x, x + b\}, \{x, x - b\}\}$

Demostración. Se sigue de hecho de que $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}_n$ tal que $a + b = 0 \Rightarrow a = -b$ y $b = -a$. □

Si G es una gráfica circulante, digamos que $G = C_n(\mathcal{J})$, entonces en virtud de las proposiciones 3.0.3 y 3.0.4 siempre podemos asumir que $\forall\ a \in \mathcal{J}$ se tiene que $a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Definición 3.0.5. *Sea $n \in \mathbb{N}$.*
Sean $A, B \subseteq \mathbb{Z}_n$, $\omega \in \mathbb{Z}$ definimos:

(1) $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

(2) $\omega A = \{\omega a : a \in A\}$.

Si $A = \{a\}$, entonces denotaremos $A + B$ como $a + B$.

Proposición 3.0.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$.*
Para $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}_n$, con $\mathcal{J} \neq \emptyset$ se tiene que $\forall\ x \in \mathbb{Z}_n$ $|\mathcal{J}| = |\mathcal{J} + x|$

Demostración. Sea $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}_n$, $x \in \mathbb{Z}_n$.
Sea $\varphi_x : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J} + x$ dada por

$$\varphi(a) = a + x$$

Evidentemente φ es biyectiva, en consecuencia

$$|\mathcal{J}| = |\mathcal{J} + x|, \ \forall\ x \in \mathbb{Z}_n$$

□

Teorema 3.0.7. *Sea $n \in \mathbb{N}$.*
Para $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}_n$, con $\mathcal{J} \neq \emptyset$. Si $m = |\mathcal{J}|$ y $\forall\ a \in \mathcal{J}$ se cumple que $a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces
$\forall\ x \in \mathbb{Z}_n$ se tiene que

$$|\{\{x, x \pm a\} : a \in \mathcal{J}\}| = \begin{cases} 2m & si \quad \forall(a \in \mathcal{J})(a \not\equiv \frac{n}{2} \pmod{n}) \\ 2m - 1 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}_n$, con $\mathcal{J} \neq \emptyset$ tal que $m = |\mathcal{J}|$ y $\forall\ a \in \mathcal{J}$ se cumple que $a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Claramente $\forall\ a \in \mathcal{J}$ tal que $a \not\equiv \frac{n}{2} \pmod{n}$ se tiene que

$$\{x, x - a\} \neq \{x, x + a\}, \text{ (se sigue de la proposición 3.0.3)}$$

Si $\exists\ a \in \mathcal{J}$ tal que $a \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}$ se tiene que

$$\{x, x - a\} = \{x, x + a\}, \text{ (se sigue de la proposición 3.0.3)}$$

Claramente $\mathcal{J}$ tiene a lo más un elemento digamos j tal que $j \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}$ En consecuencia,

$$|\{\{x, x \pm a\} : a \in \mathcal{J}\}| = \begin{cases} 2m & si \quad \forall(a \in \mathcal{J})(a \not\equiv \frac{n}{2} \pmod{n}) \\ 2m - 1 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

□

Corolario 3.0.8. *$\forall\ n \in \mathbb{N}$ y $G = C_n(\mathcal{J})$ una gráfica circulante.*
Se tiene que $d_G(u) = d_G(v)\ \forall\ u, v \in V(G)$, ademas

$$\delta(G) = \begin{cases} 2m & si \quad \forall(a \in \mathcal{J})(a \not\equiv \frac{n}{2} \pmod{n}) \\ 2m-1 & en \qquad otro \qquad caso \end{cases}$$

Demostración. Se sigue inmediatamente del teorema anterior. □

Del corolario 3.0.7 se sigue que toda gráfica circulante es **regular**.

Definición 3.0.9.

Sea $n, m \in \mathbb{N}$ y $\{a_1, a_2, ..., a_m\} \subseteq \mathbb{Z}_n$.

$$\langle\{a_1, a_2, ..., a_n\}\rangle = \{x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_ma_m \pmod{n} : x_i \in \mathbb{Z}\}$$

Lema 3.0.10. *Sea $n, m \in \mathbb{N}$ y $\{a_1, a_2, ..., a_m\} \subseteq \mathbb{Z}_n$.*
$mcd(a_1, a_2, ..., a_m, n) = 1$ si y solo si $\mathbb{Z}_n = \langle\{a_1, a_2, ..., a_n\}\rangle$

Demostración. Sea $n, m \in \mathbb{N}$ y $\{a_1, a_2, ..., a_m\} \subseteq \mathbb{Z}_n$.
($\Rightarrow$) $mcd(a_1, a_2, ..., a_m, n) = 1 \Rightarrow \exists\ x, x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$nx + \sum_{k=1}^{m} x_ka_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} x_ka_k \equiv 1 \pmod{n}$$

Como consecuencia inmediata, se sigue que

$$\mathbb{Z}_n = \langle\{a_1, a_2, ..., a_n\}\rangle.$$

($\Leftarrow$) $\mathbb{Z}_n = \langle\{a_1, a_2, ..., a_n\}\rangle \Rightarrow \exists\ x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{m} x_ka_k \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow n \,\Big|\, \Big(\sum_{k=1}^{m} x_ka_k - 1\Big) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_ka_k - 1 = nx \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} x_ka_k + n(-x) = 1$$

Por tanto, $mcd(a_1, a_2, ..., a_m, n) = 1$ □

Lema 3.0.11. *$\forall\ G = C_n(\mathcal{J})$ gráfica circulante.*
Si para $x, y \in V(G)\ \exists\ (x, y)$-trayectoria T, entonces $\exists\ a_{j_1}, ..., a_{j_r} \in \mathcal{J}$ tal que,

$$T = (x, x + a_{j_1}, ..., x + a_{j_1} + ... + a_{j_r}) \text{ y } x + a_{j_1} + ... + a_{j_r} = y.$$

Donde r es la longitud de T.

Demostración. Sea $G = C_n(\mathcal{J})$ gráfica circulante y $x, y \in V(G)$ tal que $\exists\ (x, y)$-trayectoria T.
Digamos que $T = (x = u_0, u_1, ..., u_r = y)$, $r \in \mathbb{N}$, tenemos que

$\{u_{i-1}, u_i\} \in E(G),\ \forall\ i \in \{1, ..., r\} \Rightarrow u_i - u_{i-1} \in \mathcal{J} \Rightarrow \exists\ a_{j_i} \in \mathcal{J}$ tal que $u_i = u_{i-1} + a_{j_i}$

De manera inmediata se sigue que

$$u_i = u_0 + \sum_{k=1}^{i} a_{j_k} = x + \sum_{k=1}^{i} a_{j_k}$$

Por tanto, $y = u_r = x + \sum_{k=1}^{r} a_{j_k}$ y

$$T = (x, x + a_{j_1}, ..., x + a_{j_1} + ... + a_{j_r})$$

□

Teorema 3.0.12. *Sea $G = C_n(\mathcal{J})$ gráfica circulante.*
G es conexa si y solo si $mcd(\mathcal{J} \cup \{n\}) = 1$,

Demostración. Sea $G = C_n(\mathcal{J})$ gráfica circulante.
($\Rightarrow$) G es conexa $\Rightarrow \exists$ $(0,1)$-trayactoria T.
Sea r la longitud de T, por el lema 3.0.11, se sigue que $\exists$ $a_{j_1}, ..., a_{j_r} \in \mathcal{J}$ tal que

$$T = \left(0, a_{j_1}, a_{j_1} + a_{j_2}, ..., \sum_{k=1}^{r} a_{j_k} = 1\right)$$

Esto es,

$$\sum_{k=1}^{r} a_{j_k} \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow mcd(a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_r}, n) = 1$$

En consecuencia, $mcd(\mathcal{J} \cup \{n\}) = 1$.

($\Leftarrow$) $mcd(\mathcal{J} \cup \{n\}) = 1$ por el lema 3.0.10, se sigue que $\mathbb{Z}_n = \langle \mathcal{J} \rangle$.
Sea $\{a_1, a_2, ..., a_m\} = \mathcal{J}$.

Sea $x \in \mathbb{Z}_n$, tenemos que

$$\exists\ x_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, .., m \text{ tal que } x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_ma_m \equiv x \pmod{n}$$

Obviamente suponer que $0 \leq x_i \leq n-1$ (pues podemos identificarlo con su residuo módulo n).

Sea $\mathcal{W} = (0, a_1, 2a_1, \ldots, x_1a_1, x_1a_1 + a_2, \ldots, x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_ma_m \equiv x \pmod{n})$.

Evidentemente $\mathcal{W}$ es un paseo de 0 a x, es decir, están conectados.
Por tanto,

$$G \text{ es conexa.}$$

□

Corolario 3.0.13. *Sea $G = C_n(\mathcal{J})$ gráfica circulante y $g = mcd(\mathcal{J} \cup \{n\})$.*
Si H es componente conexa de G, entonces , $H \cong C_{\frac{n}{g}}(\frac{1}{g}\mathcal{J})$

Demostración. Sea $G = C_n(\mathcal{J})$ gráfica circulante, $g = mcd(\mathcal{J} \cup \{n\})$ y H componente conexa de G.
Consideremos $\alpha = \min_{x \in V(H)} x$.
Sea $y \in V(H)$, por el lema 3.0.11 se sigue que $\exists$ $a_{j_1}, ..., a_{j_r} \in \mathcal{J}$ tales que

$$\alpha + a_{j_1} + ... + a_{j_r} = y \Rightarrow \tfrac{y-\alpha}{g} \in \mathbb{N}_0.$$

Asi,

$$\tfrac{y-\alpha}{g} \in \{0, 1, \ldots, \tfrac{n}{g} - 1\}, \text{ pues } \tfrac{y-\alpha}{g} \leq \tfrac{(n-1)-\alpha}{g} < \tfrac{n}{g}$$

Por el teorema 3.0.12, se sigue que $C_{\frac{n}{g}}(\frac{1}{g}\mathcal{J})$ es conexa. De manera inmediata por el lema 3.0.11 , se tiene que dado $x \in \mathbb{Z}_{\frac{n}{g}}$ $\exists$ $a_{j_1}, ..., a_{j_r} \in \mathcal{J}$ tales que

$$gx = a_{j_1} + ... + a_{j_r} \Rightarrow gx + \alpha \in V(H).$$

Sea $\varphi : V(H) \longrightarrow \{0, 1, \ldots, \frac{n}{g} - 1\}$ dada por

$$\varphi(x) = \tfrac{x-\alpha}{g}$$

Por todo lo anterior, se sigue que φ esta bien definida, es inyectiva y sobre, por tanto es biyectiva.

Sea $\{x,y\} \in E(H)$.

$$\Rightarrow y - x \in \mathcal{J} \Rightarrow \varphi(y) - \varphi(x) \in \tfrac{1}{g}\mathcal{J}$$

Por tanto, $\{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E(C_{\frac{n}{g}}(\frac{1}{g}\mathcal{J}))$.
En consecuencia, φ es un homomorfismo de gráficas, esto es

$$H \cong C_{\frac{n}{g}}(\tfrac{1}{g}\mathcal{J})$$

□

En virtud, de todo lo anterior, solo consideraremos gráficas circulantes conexas. Esto es, en adelante, solo consideraremos gráficas conexa(Se supondrá la conexidad de estas).

3.1. Gráficas circulantes bipartitas

Definición 3.1.1. *Para p primo fijo, definimos la **valuación p-adica**,*
$v_p : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ *dada por*

$$v_p(k) = \max\{l : p^l | k\}$$

Teorema 3.1.2. $\forall$ *p primo.*
$\forall\ k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ *se tiene que:*

(*a*) $v_p(k_1 + k_2) \geq \min\{v_p(k_1), v_p(k_2)\}$

(*b*) $v_p(k_1 + k_2) = \min\{v_p(k_1), v_p(k_2)\}$, *si* $v_p(k_1) \neq v_p(k_2)$

(*c*) $v_p(k_1 k_2) = v_p(k_1) + v_p(k_2)$

(*d*) $v_p(k) = v_p(-k)$

Demostración. Sea p primo y $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Tenemos
$k_1 = p^{v_p(k_1)}x$, $k_2 = p^{v_p(k_2)}y$, donde $x, y \in \mathbb{Z}$, $p \not| x$ y $p \not| y$

(*a*) Sea $l = \min\{v_p(k_1), v_p(k_2)\} \Rightarrow l \leq v_p(k_i) \Rightarrow p^l | p^{v_p(k_i)}$, como $p^{v_p(k_i)} | k_i$

$$p^l | k_i \Rightarrow p^l | k_1 + k_2 \Rightarrow v_p(k_1 + k_2) \geq l$$

Por tanto, $v_p(k_1 + k_2) \geq \min\{v_p(k_1), v_p(k_2)\}$.

(*b*) Supongamos $v_p(k_1) \neq v_p(k_2)$ y sin perdida de generalidad supongase que
$v_p(k_1) < v_p(k_2) \Rightarrow v_p(k_2) - v_p(k_1) > 0$ y $v_p(k_1) = \min\{v_p(k_1), v_p(k_2)\}$, así

$$k_1 + k_2 = p^{v_p(k_1)}(x + yp^{v_p(k_2) - v_p(k_1)})$$

En consecuencia, $v_p(k_1 + k_2) = \min\{v_p(k_1), v_p(k_2)\}$.

(*c*) Tenemos $k_i k_2 = p^{v_p(k_1) + v_p(k_2)}xy$, por tanto

$$v_p(k_1 k_2) = v_p(k_1) + v_p(k_2)$$

(*d*) $p^{v_p(k)} \big| k \Rightarrow p^{v_p(k)} \big| -k \Rightarrow v_p(k) \leq v_p(-k)$
$p^{v_p(-k)} \big| -k \Rightarrow p^{v_p(-k)} \big| k \Rightarrow v_p(-k) \leq v_p(k)$
Por tanto, $v_p(k) = v_p(-k)$

Nota: Las conclusiones en $(a), (b), (c)$ se siguen del hecho de que $mcd(p, x) = 1$ $mcd(p, y) = 1$. □

Lema 3.1.3. *$\forall$ p primo fijo, $k_1, k_2, ..., k_m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. $g = mcd(k_1, k_2, ..., k_m)$. Tenemos*

(i) $v_p(g) = \text{mín}\{v_p(k_1), ..., v_p(k_m)\}$

(ii) $\text{mín}\{v_p(n), v_p(k_1 - k_m), ..., v_p(k_{m-1} - k_m), v_p(k_m)\} \leq \text{mín}\{v_p(n), v_p(k_1), ..., v_p(k_m)\}$

Demostración. Sea p primo, $k_1, k_2, ..., k_m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ y $g = mcd(k_1, k_2, ..., k_m)$.
Sea $r = \text{mín}\{v_p(k_1), ..., v_p(k_m)\}$, $\omega = \text{mín}\{v_p(n), v_p(k_1 - k_m), ..., v_p(k_{m-1} - k_m), v_p(k_m)\}$.

(i) Tenemos

$$p^r \,\big|\, p^{v_p(k_i)} \text{ y } p^{v_p(k_i)} \,\big|\, k_i \;\forall\; i = 1, 2, ..., m \Rightarrow p^r \,\big|\, k_i \;\forall\; i = 1, 2, ..., m$$

Así, $p^r \,\big|\, g \Rightarrow v_p(g) \geq r$. Igualmente se tiene,

$$p^{v_p(g)} \,\big|\, g \text{ y } g \,\big|\, k_i \;\forall\; i = 1, 2, ..., m \Rightarrow p^{v_p(g)} \,\big|\, k_i \;\forall\; i = 1, 2, ..., m$$

$\Rightarrow v_p(g) \leq v_p(k_i) \;\forall\; i = 1, 2, ..., m \Rightarrow v_p(g) \leq r$

$$\text{Por tanto, } v_p(g) = r = \text{mín}\{v_p(k_1), ..., v_p(k_m)\}$$

(ii) Analogamente a (i)

(a) $p^\omega \,\big|\, p^{v_p(k_i - k_m)} \;\forall\; i = 1, 2, ..., m-1 \Rightarrow p^\omega \,\big|\, k_i - k_m \;\forall\; i = 1, 2, ..., m-1$

(b) $p^\omega \,\big|\, p^{v_p(k_m)} \Rightarrow p^\omega \,\big|\, k_m$

De $(a), (b)$ se sigue que $p^\omega \,\big|\, k_i \;\forall\; i = 1, 2, ..., m$

$\Rightarrow\; \omega \leq v_p(k_i) \;\forall\; i = 1, 2, \ldots, m$. Además $\omega \leq v_p(n)$

$$\therefore \omega \leq \text{mín}\{v_p(n), v_p(k_1), ..., v_p(k_m)\}$$

□

Lema 3.1.4. *$\forall$ $x, y \in \mathbb{Z}$.*

$$x|y \textit{ si y solo si } v_p(x) \leq v_p(y) \;\forall\; p \textit{ primo}$$

Demostración. Sea $x, y \in \mathbb{Z}$.

$(\Rightarrow)$ $x|y$, sea p primo.
$\exists$ $u \in \mathbb{Z}$ tal que $y = xu$ y dado que $p^{v_p(x)}|x \Rightarrow \exists$ $v \in \mathbb{Z}$ tal que $x = p^{v_p(x)}v$

$$\Rightarrow y = p^{v_p(x)}(uv) \Rightarrow p^{v_p(x)}|y.$$

Por tanto, $v_p(x) \leq v_p(y)$, $\forall$ p primo.

$(\Leftarrow)$ $v_p(x) \leq v_p(y) \;\forall\; p$ primo.
Por el Teorema Fundamental de la Aritmetica se sigue que:
$\exists$ $\{p_1, p_2, \ldots, p_\omega\} \subset \mathbb{N}$, p_j primo $\forall$ $j = 1, 2, \ldots, \omega$ y $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\omega\} \subset \mathbb{N}$ tal que

$$x = \prod_{i=1}^{\omega} p_i^{\alpha_i}$$

Evidentemente $v_{p_i}(x) = \alpha_i \; \forall \; i = 1, 2 \ldots \omega \Rightarrow x = \prod_{i=1}^{\omega} p_i^{v_{p_i}(x)}$.

Por hipótesis se sique que $v_{p_i}(x) \leq v_{p_i}(y) \Rightarrow p_i^{v_{p_i}(x)} \,\big|\, y, \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, \omega\}$. Dado que $mcd(p_1, p_2, \ldots, p_\omega) = 1$, entonces

$$\prod_{i=1}^{\omega} p_i^{v_{p_i}(x)} \,\Big|\, y$$

Por lo tanto, $x|y$

$\square$

Lema 3.1.5. *Sea $G = C_n(a_1, a_2, ..., a_m)$ circulante.*
G tiene un ciclo de longitud impar $\Leftrightarrow \exists\; x_0, x_1, ..., x_m \in \mathbb{Z}$ tales que,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \equiv 1 \pmod 2 \;\; y \;\; x_0 n + \sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0$$

Demostración. Sea $G = C_n(a_1, a_2, ..., a_m)$ circulante.

($\Rightarrow$) G tiene un ciclo de longitud impar.
Sea $\mathcal{C}$ ciclo de longitud impar de G, digamos que r es la longitud de $\mathcal{C}$, en virtud del lema 3.0.11 se sigue que $\exists\; a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}$ tales que

$$\mathcal{C} = (u, u + a_{j_1}, \ldots, u + a_{j_1} + \cdots + a_{j_r} \equiv u \pmod n)$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{r} a_{j_k} \equiv 0 \pmod n \Rightarrow \exists\; x_0 \in \mathbb{Z}$ tal que,

$$x_0 n + \sum_{k=1}^{r} a_{j_k} = 0 \text{ - } (*)$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea $x_i = \big|\{k : a_{j_k} = a_i\}\big|$, así de $(*)$ obtenemos

$$x_0 n + \sum_{i=1}^{m} x_i a_i = 0$$

Del hecho de que $\mathcal{C}$ es impar, se sigue que:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \equiv 1 \pmod 2$$

($\Leftarrow$) $\exists\; x_0, x_1, ..., x_m \in \mathbb{Z}$ tales que,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \equiv 1 \pmod 2 \text{ y } x_0 n + \sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0.$$

Sin perdida de generalidad podemos suponer que $x_i \neq 0 \; \forall \; i \in \{1, \ldots, m\}$, pues aquellos $x_i = 0$ no aportan nada.

Sea $\mathcal{W} = (0, a_1, 2a_1, \ldots, x_1a_1, \ldots, x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_ma_m \equiv 0 \pmod{n})$.

Claramente $\mathcal{W}$ es un paseo cerrado, entonces es la unión de ciclos ajenos en aristas.

Dado que $\sum_{i=1}^{m} x_i \equiv 1 \pmod 2$,

$$\Rightarrow \mathcal{W} \text{ tiene un ciclo de longitud impar}$$

Por tanto, G tiene un ciclo de longitud impar.

□

Teorema 3.1.6. *Sea $G = C_n(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ circulante conexa.*

$$G \textit{ es bipartita} \Leftrightarrow v_2(d') > v_2(a_m)$$

Donde $d' := mcd(n, a_1 - a_m, ..., a_{m-1} - a_m, 2a_m)$.

Demostración. G es bipartita $\Leftrightarrow$ G no tiene ciclos de longitud impar $\Leftrightarrow$ (lema 3.1.5) $\nexists \; x_0, x_1, ..., x_m \in \mathbb{Z}$ tales que,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \equiv 1 \pmod 2 \text{ y } x_0 n + \sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0$$

Equivalentemente, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 2u + 1$ para algún $u \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_m = -\sum_{i=1}^{m-1} x_i + 2u + 1$.

Así,

$0 = x_0 n + \sum_{i=1}^{m} a_i x_i = x_0 n + a_m x_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i x_i = x_0 n - \sum_{i=1}^{m-1} a_m x_i + a_m(2u+1) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i x_i$

$$x_o n + \sum_{i=1}^{m-1} (a_i - a_m) x_i + 2a_m u = -a_m$$

Sea $d' := mcd(n, a_1 - a_m, ..., a_{m-1} - a_m, 2a_m)$.

Por tanto, G es bipartita $\Leftrightarrow d' \nmid a_m$. - - - - - - - - - - - - - - - - - - -$(*)$

Sea $p \neq 2$ primo, tenemos $v_p(2) = 0$ y por el lema 3.1.3 se sigue que

$$\begin{aligned} 0 \leq v_p(d') &= \text{mín}\{v_p(n), v_p(a_1 - a_m), ..., v_p(a_{m-1} - a_m), v_p(a_m)\} \\ &\leq \text{mín}\{v_p(n), v_p(a_1), ..., v_p(a_m)\} = v_p(mcd(n, a_1, \ldots, a_m)) = v_p(1) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $v_p(d') = 0$ si $p \neq 2$.

En virtud del lema 3.1.4 se tiene que $(*)$ es equivalente a:

$$v_2(d') > v_2(a_m)$$

Por tanto, G es bipartita $\Leftrightarrow v_2(d') > v_2(a_m)$.

□

Corolario 3.1.7. *Sea $G = C_n(a_1, a_2, ..., a_m)$ circulante conexa.*
G es bipartita si y solo si $u \equiv 1 \pmod 2$ $\forall\ u \in \mathcal{J}$ y $n \equiv 0 \pmod 2$.

Demostración. Sea $G = C_n(a_1, a_2, ..., a_m)$ circulante conexa.
sea $d' := mcd(n, a_1 - a_m, ..., a_{m-1} - a_m, 2a_m)$.
($\Rightarrow$) G es bipartita.
Por el Teorema 3.1.6 y el lema 3.1.3 se sigue que

$$v_2(a_i - a_m) \geq v_2(d') > v_2(a_m),\ \forall\ i = 1, 2, \ldots m - 1.$$

Si $\exists\ i \in \{1, 2, \ldots, m - 1\}$ t.q. $v_2(a_i) \neq v_2(a_m)$, entonces por el Teorema 3.1.2

$$v_2(a_m) \geq \text{mín}\{v_2(a_i), v_2(a_m)\} = v_2(a_i - a_m) > v_2(a_m), \text{ lo cual no es posible.}$$

Por lo tanto $v_2(a_1) = v_2(a_2) = \cdots = v_2(a_m)$ y dado que $v_2(n) \geq v_2(d') > v_2(a_m)$, se sigue que:

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots m\}$ se tiene,
$v_2(a_i) = \text{mín}\{v_2(n), v_2(a_1), ..., v_2(a_m)\} = v_2(mcd(n, a_1, \ldots, a_m)) = v_2(1) = 0.$

$$\text{Por lo tanto, } a_i \equiv 1 \pmod 2,\ \forall\ j \in \{1, 2, ..., m\} \text{ y } n \equiv 0 \pmod 2.$$

($\Leftarrow$) $a_j \equiv 1 \pmod 2$ $\forall\ j \in \{1, 2, ..., m\}$ y $n \equiv 0 \pmod 2$.
Inmediatamente tenemos que :

$$v_2(a_i - a_m) \geq 1\ \forall\ i \in \{1, 2, \ldots, m - 1\}$$

Por tanto,
$v_2(d') = \text{mín}\{v_2(n), v_2(a_1 - a_m), ..., v_2(a_{m-1} - a_m), v_2(a_m)\} \geq 1 > v_2(a_m) = 0$

Por el Teorema 3.1.6 se concluye que G es bipartita.

□

3.2. Número cromático

En esta sección, nos dedicaremos al calculo del número cromático $\chi(G)$ para gráficas circulantes con $G = C_n(a, b)$.

Teorema 3.2.1. *Sea $G := C_n(a)$ circulante conexa. Entonces,*

$$\chi(G) = \begin{cases} 2 & si \quad n \equiv 0 \pmod 2 \\ 3 & si \quad n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

Demostración. Sea $G := C_n(a)$ circulante conexa.
$\Rightarrow$ G es un ciclo (Pues, G es Hamiltoniana)
Por tanto,

$$\chi(G) = \begin{cases} 2 & si \quad n \equiv 0 \pmod 2 \\ 3 & si \quad n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

□

Proposición 3.2.2. *(Brooks) Sea G una gráfica y $d > 2$ tal que $d_G(u) \leq d$, $\forall\ u \in V(G)$ y si $C \leq G$ es una componente conexa de G, entonces C no es una gráfica completa de orden $d + 1$. Entonces $\chi(G) \leq d$*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema de Brooks □

La proposición 3.2.1 nos asegura que una gráfica circulante $G = C_n(a,b)$ puede ser coloreada con 4 colores, excepto en el caso $G = K_5$, ¿podemos generar K_5 como gráfica circulante ?, tomamos $n = 5$ y $a = 1, b = 2$, tenemos $C_5(1,2) = K_5$ y es la única manera de obtener a K_5 como gráfica circulante, en este caso $\chi(C_5(1,2)) = 5$.

Por tanto, solo tenemos que decidir si $C_n(a,b)$ se puede colorear con 3 colores. Esto se hará sobre todo haciendo una 3-coloración explicita, usando los colores $1, 2, 3$. Aquí solo trataremos algunos casos particulares.

Estas coloraciones se darán generalmente como elementos del semigrupo libre generado por $\{B, G, R\}$.

A manera de ejemplo $((BG)^2R)^3BR = BGBGRBGBGRBGBGRBR$.

Sea $x_0x_1 \dots x_{r-1}x_r$, definimos la rotación l, por:

$$rot(l) := x_{r-l}x_{r-(l-1)} \dots x_{r-1}x_rx_0x_1 \dots x_{r-l+1}$$

Proposición 3.2.3. *Sea $C_n(a,b)$ gráfica circulante tal que $mcd(n,a) = 1$, entonces*

$$C_n(a,b) \cong C_n(1, a^{-1}b \pmod{n})$$

Demostración. Sea $G = C_n(a,b)$ gráfica circulante tal que $mcd(n,a) = 1$.
$\Rightarrow \exists\ a^{-1}$, así sea $H = C_n(1, a^{-1}b)$ y definamos la siguiente función
$\phi : V(G) \longrightarrow V(H)$ dado por

$$\phi(x) = a^{-1}x.$$

Obviamente ϕ en biyectiva.
Sea $u, v \in E(G) \Rightarrow v - u = a$ ó $v - u = b$.

Si $v - u = a \Rightarrow a^{-1}(v) - a^{-1}(u) = 1$

Si $v - u = b \Rightarrow a^{-1}(v) - a^{-1}(u) = a^{-1}b$

$\Rightarrow \phi(v) - \phi(u) \in \{1, a^{-1}b\}$

$\Rightarrow \{\phi(u), \phi(v)\} \in E(H)$

Por tanto, ϕ preserva la adyacencia, en consecuencia

$$C_n(a,b) \cong C_n(1, a^{-1}b)$$

□

En virtud de la proposición 3.2.3 consideremos el caso especial $C_n(1,a)$ con $mcd(a,n) = 1$ y es la que trataremos en lo que sigue.

Si $n \equiv 0 \pmod 2$, entonces $a \equiv 1 \pmod 2$, y por el corolario 3.1.7, se tiene que

$$C_n(1,a) \text{ es bipartita} \Rightarrow \chi(C_n(1,a)) = 2.$$

De manera nos falta considerar caso n impar, recuerdese que podemos suponer que

$$2 \leq a \leq \tfrac{(n-1)}{2}.$$

Proposición 3.2.4. *Sea $n \equiv 1 \pmod 2$ y $a \in \left\{2, \frac{n-1}{2}\right\}$.*

$$G = C_n(1,a) \text{ es 3-coloreable} \Leftrightarrow 3 \big| n$$

Demostración. Sea $n \equiv 1 \pmod 2$ y $a \in \left\{2, \frac{n-1}{2}\right\}$.
Tenemos $mcd(n-1, n+1) = 2 \Rightarrow mcd\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = 1$.
Si $a = \frac{n-1}{2}$, entonces $1 = mcd(a, n) = mcd\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = mcd(\frac{n-1}{2}, 1)$, y dado que $2a \equiv -1 \pmod n$, se tiene que

$$G = C_n(1, a) = C_n(1, -2) = C_n(1, 2), \text{ (Por la proposicion 3.2.3)}$$

De manera que basta considerar el caso $a = 2$

($\Rightarrow$) $G = C_n(1, 2)$ es 3-coloreable.
Sea $c : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ una 3-coloración de G. Sin perdida de generalidad, supongamos que $c(0) = 0$ y $c(1) = 1$.
Afirmo: Para k con $0 \leq k < n$ se tiene $c(k) = k \pmod 3$.
Asumase que es cierto para $0 \leq k-1, k < n-1$. Tenemos

$$\{k, k+1\}, \{k-1, k+1\} \in E(G) \Rightarrow c(k+1) \neq \begin{cases} c(k) = k \pmod 3 \\ c(k-1) = k-1 \pmod 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow c(k+1) = k+1 \pmod 3$.

$$\{n-2, 0\}, \{n-1, 0\} \in E(G) \Rightarrow 0 \neq \begin{cases} n-2 \pmod 3 \\ n-1 \pmod 3 \end{cases}$$

Por tanto, $3 \big| n$.

($\Leftarrow$) $3 \big| n$.
Sea $c : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ dado por

$$c(i) := i \pmod 3$$

Es evidente que c nos define una coloración de G, por lo tanto $G = C_n(1, a)$ es 3-coloreable. □

Proposición 3.2.5. *Sea* $n \equiv 1 \pmod 2$ *y*

$$\max\left\{2, \tfrac{n-3}{3}\right\} < a \leq \tfrac{n-3}{2}.$$

$C_n(1, a)$ *es 3-coloreable* $\Leftrightarrow (n, a) \neq (13, 5)$

Demostración. Sea $n \equiv 1 \pmod 2$ y

$$\max\left\{2, \tfrac{n-3}{3}\right\} < a \leq \tfrac{n-3}{2}. \text{ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - } (*)$$

($\Leftarrow$) $(n, a) \neq (13, 5)$.Mostremos que $C_n(1, a)$ es 3-coloreable
De $(*)$ se sigue que $\exists\ s \in \mathbb{N}_0$ tal que $a + s = \frac{n-3}{2}$

$$\Rightarrow n = 2a + 2s + 3$$

Ahora, si $s \geq \frac{a}{2} \Rightarrow n \geq 3a + 3$ y por $(*)$ $n > 3(\frac{n-3}{3}) + 3 = n$, lo cual no es posible.

Por tanto $s < \frac{a}{2}$.

De esta manera, podemos escribir a n, de la siguiente manera

$$n = 2(a+1) + 2s + 1 \text{ y } 0 \leq s < \tfrac{a}{2}.$$

Y aplicando el algoritmo de la divición con a y $2s + 3$, se sigue que

$$a = (2s+3)q + t, \text{ con } q, t \in \mathbb{Z} \text{ y } t \in \{0, \ldots, 2s+2\}.$$

Si t es impar, entonces sea

$X = ((BG)^{s+1}R)^q(BG)^{(t-1)/2}B((GR)^{s+1}B)^q(GR)^{(t-1)/2}G(RG)^{s-((t-1)/2)}RB(RB)^{(t-1)/2}R$

$Xrota = ((GR)^{s+1}B)^q(RB)^{(t-1)/2}R((BG)^{s+1}R)^q(BG)^{(t-1)/2}B(GR)^{s-((t-1)/2)}GR(GR)^{(t-1)/2}B$

esta es una coloración valida, no evitaremos la verificación tediosa.

Si t es par, tenemos los siguientes caso y la respectiva coloración:

(i) $2 \leq t \leq 2s$ y $2\big|t$.
$X := ((BG)^{s+1}R)^q(BG)^{t/2}((RB)^{s+1}G)^q(RB)^{t/2}(GR)^{s+1-(t/2)}(BR)^{(t/2)-1}BGR.$

(ii) $t = 0$.
$X := ((BG)^{s+1}R)^q((GR)^{s+1}B)^q(RB)^{s+1}G.$

(iii) $t = 2s+2$ y $s \geq 1$.
$X := ((BG)^{s+1}R)^{2q+2}(BG)^sR.$

(iv) $t = 2s+2$, $s = 0$ y $n \geq 19$.
$X := RBGBGRGR(BGR)^{((n-1)/6)-2}GRBR(BGR)^{((n-1)/6)-2}B$

Por tanto, $C_n(1,a)$ es 3-coloreable.

$(\Rightarrow)$ $C_n(1,a)$ es 3-coloreble.
Supongamos que para $n = 13$ y $a = 5$ se tiene que $C_{13}(1,5)$ es 3-coloreable.

Sea $c : \{0, 1, \ldots, 12\} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ una coloración de $C_{13}(1,5)$ y $E = E(C_{13}(1,5))$.

Dado que $3 \not| \, n$, entonces existen algunos i's tales que

$$c((i-1) \pmod{13}) = c((i+1) \pmod{13})$$

Sin perdida de generalidad supongamos que $c(0) = 0$, $c(1) = 1$ y $c(2) = 0$.

Supongamos que $c(12) = c(3) = 1$. Ahora,

$\{0,8\}, \{3,8\} \in E \Rightarrow c(8) = 2$
$\{8,9\}, \{1,9\} \in E \Rightarrow c(9) = 0$
$\{2,7\}, \{7,8\} \in E \Rightarrow c(7) = 1$

Esto no es posible, pues $\{7,12\} \in E$.

En consecuencia, $c(12) = 2$ ó $c(3) = 2$, por simetría basta considerar un casa, digamos $c(3) = 2$.

Tenemos:

$\{0,8\}, \{3,8\} \in E \Rightarrow c(8) = 1$
$\{7,8\}, \{2,7\} \in E \Rightarrow c(7) = 2$
$\{7,12\}, \{0,12\} \in E \Rightarrow c(12) = 1$
$\{4,12\}, \{3,4\} \in E \Rightarrow c(4) = 0$

$\{4,9\},\{8,9\} \in E \Rightarrow c(9)=2$
$\{2,10\},\{9,10\} \in E \Rightarrow c(10)=1$
$\{5,10\},\{4,5\} \in E \Rightarrow c(5)=2$
$\{1,6\},\{5,6\} \in E \Rightarrow c(6)=0$
$\{3,11\},\{6,11\} \in E \Rightarrow c(11)=1$

Esto no es posible, pues $\{10,11\} \in E$.

$$\text{Por tanto, } (n,a) \neq (13,5)$$

□

Proposición 3.2.6. *Sea n impar y*

$$3 \leq a \leq \tfrac{n-3}{3}$$

Entonces $C_n(1,a)$ es 3-coloreable.

Demostración. Sea n impar y

$$3 \leq a \leq \tfrac{n-3}{3} \text{ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - } (*)$$

Sea $r := \lfloor \frac{n}{a+1} \rfloor$.
Supongamos que $r < 3 \Rightarrow \frac{n}{a+1} < 3 \Rightarrow n < 3(a+1) \Rightarrow \frac{n-3}{3} < a$, esto no puede ocurrir, pues se cumple $(*)$.

Pot tanto, $r \geq 3$.

Caso-1. $2|a$ y $2 \not| r \Rightarrow r(a+1)$ es impar, ahora:
$3 \leq r \leq \frac{n}{a+1} \Rightarrow r(a+1) \leq n$, $\exists\ s' \in \mathbb{N}_0$ t.q $n = r(a+1)+s'$

Dado que n es impar, entonces s' es par, así $s' = 2s$ para algún $s \in \mathbb{N}_0$. De esta manera,

$$n = r(a+1)+2s, \text{ para algún } s \in \mathbb{Z}$$

Aún más, $0 \leq s \leq \frac{a}{2}$.

Si $s \leq (a/2)-1$ tomamos la coloración
$X := ((BG)^{a/2}R)^{r+1}(BR)^s B(GR)^{a/2}$.

$s = a/2$ tomamos la coloración.
$X := ((BG)^{a/2}R)^{r-1}B(GR)^{(a/2)-1}BG(RB)^{(a/2)-1}GR$.

Por tanto, $C_n(1,a)$ es 3-coloreable.

Caso-2. $2 \not| a$ ó $2|r \Leftrightarrow 2 \big| r(a+1)$.
igualmente para ese caso podemos escribir $n = r(a+1)+2s+1$, con $0 \leq s \leq \frac{a}{2}$.
Tenemos:

Si a es impar, tomamos la coloración:
$X := (BG)^{(n-2a-1)/2}B(RB)^{(a-1)/2}R(GR)^{(a-1)/2}G$

Si a es par y r par, tomamos la coloración:
$X := ((BG)^{a/2}R)^{r-2}B(RB)^s(GR)^{a/2}BG(RB)^{(a/2)-1}GR$

Por lo tanto, $C_n(1,a)$ es 3-coloreable. □

3.3. Número cromático para cada $k \in \mathbb{N}$ de la gráficas circulantes $C_n(1,2,\ldots,k)$

Lema 3.3.1. *Sean $n, k \in \mathbb{N}$.*

$$Si\ n \leq 2k+1,\ entonces\ \chi(C_n(1,2,\ldots,k)) = n.$$

Demostración. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $n \leq 2k+1$. Sea $G = C_n(1,2,\ldots,k)$.

Evidentemente $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k$.

Afirmación: $G \cong K_n$.

Como G es transitiva en vértices, basta ver que 0 es adyacente al resto de los vértices.

Sea $x \in V(G) = \mathbb{Z}_n$, tenemos que

$$\big|\{y \in \mathbb{Z} : x \leq y < n\}\big| \leq k \text{ ó } \big|\{y \in \mathbb{Z}_n : 0 < y \leq x\}\big| \leq k, \text{ (pues } \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \leq k)$$

Así,

$$\{0, x\} \in E(G), \text{ (por definición de gráfica circulante).}$$

En consecuencia, $G \cong K_n$. Así

$$\chi(C_n(1,2,\ldots,k)) = n.$$

□

Proposición 3.3.2. *Sea $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2(k+1)$*

$$\exists\ H \leq C_n(1,2,\ldots,k) \text{ tal que } H \cong K_{k+1}$$

Demostración. Sea $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2(k+1)$.
Tomemos $G = C_n(1,2,\ldots,k)$ y sea $U := \{0,1,\ldots,k\}$, claramente,

$$G[U] \cong K_{k+1}, \text{ se sigue de la definición de gráfica circulante.}$$

□

Corolario 3.3.3. *Sea $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2(k+1)$.*

$$\chi(C_n(1,2,\ldots,k)) \geq k+1.$$

Demostración. Aplicación directa de la proposición 3.3.2 □

Lema 3.3.4. *Sean $n, k, m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq 2$.*
Si $m(k+1) \leq n < (m+1)(k+1)$, entonces

$$n \leq \chi(C_n(1,2,\ldots,k))m.$$

Demostración. Sean $n, k, m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq 2$ y $m(k+1) \leq n < (m+1)(k+1)$.
Para $G = C_n(1,2,\ldots,k)$ y $r = \chi(G)$.
Sea $c : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \{0,1,\ldots,r-1\}$ una r-coloración de G.
Definamos lo siguiente:

$$\alpha_j := \big|\{u \in V(G) : c(u) = j\}\big|,\ j \in \{0,1,\ldots,r-1\}$$

Obviamente, $n = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j$.- $(*)$
Afirmación: $\alpha_j \leq m$, $\forall\ j \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$.
Prueba.
Supongamos que $\exists\ j \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ tal que $\alpha_j > m$.

Para este j, tenemos $\{u \in V(G) : c(u) = j\} = \{u_1, u_2 \ldots, u_{\alpha_j}\}$

Como $V(G) = \mathbb{Z}_n$ y por la simetría, podemos suponer que $0 = u_1 < u_2 < \cdots < u_{\alpha_j}$

Sea $\beta_i = \big|\{x \in \mathbb{Z}_n : u_i \leq x < u_{i+1}\}\big|$ con $i \in \{1, 2, \ldots, \alpha_j - 1\}$
y $\beta_{\alpha_j} = \big|\{x \in \mathbb{Z}_n : u_{\alpha_j} \leq x < n-1\}\big|$

Claramente $n = \sum_{i=1}^{\alpha_j} \beta_i$ y $\beta_i \geq k+1$, $\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, \alpha_j\}$.

$$\Rightarrow n = \sum_{i=1}^{\alpha_j} \beta_i \geq \alpha_j(k+1) \Rightarrow n \geq (m+1)(k+1).$$

Esto no es posible, pues $n < (m+1)(k+1)$.

Por lo que $\alpha_j \leq m$, $\forall\ j \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$.

De $(*)$ se concluye que,

$$n \leq \chi(C_n(1, 2, \ldots, k))m \text{ (se sigue de la afirmación).}$$

□

Con esto ya podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.3.5. *Sean $n, k \in \mathbb{N}$.*

I Si $n < 2(k+1)$, entonces

$$\chi(C_n(1, 2, \ldots, k)) = n$$

II Si $n \geq 2(k+1)$, entonces

(a) *$\exists\ m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$ tal que $m(k+1) \leq n < (m+1)(k+1)$.*

(b) *$\chi(C_n(1, 2, \ldots, k)) = \lceil \frac{n}{m} \rceil$.*

Demostración. Sean $n, k \in \mathbb{N}$.

(I) Para $n < 2(k+1)$, del lema 3.3.1 se tiene que:

$$\chi(C_n(1, 2, \ldots, k)) = n.$$

(II) Para $n \geq 2(k+1)$.

(a) Por el algoritmo de la divición se sigue que $\exists\ m, r \in \mathbb{N}$ tal que

$$n = m(k+1) + r,\ 0 \leq r < k+1 \Rightarrow m(k+1) \leq n < (m+1)(k+1)$$

Como $n \geq 2(k+1) \Rightarrow m \geq 2$.

(b) Por el corolario 3.3.3 se sigue que:

$$\chi(C_n(1,2,\ldots,k)) \geq k+1\text{- - - - - - - - - - - - - - - - } (*)$$

Para $n = m(k+1)$, tenemos que

$X := (01\cdots k)^m$.

Es una $(k+1)$-coloración de $C_n(1,2,\ldots,k)$, así

$$\chi(C_n(1,2,\ldots,k)) = k+1 = \lceil \tfrac{n}{m} \rceil, \text{ por } (*).$$

Ahora supongamos que $m(k+1) < n < (m+1)(k+1)$

$$\Rightarrow k+2 \leq \lceil \tfrac{n}{m} \rceil\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - -}(*)$$

Sea $l = \lceil \frac{n}{m} \rceil$, $\exists\ x \in \mathbb{N}$ con $0 < x < m$ tal que

$$n = ml - x \Rightarrow n = (l-1)(x) + (l)(m-x)$$

Por $(*)$ se tiene que $l \geq k+2 \Rightarrow l-1 \geq k+1$.

Sea $\{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, a_l\}$ un conjunto de l colores.

$X := (a_1 a_2 \cdots a_{l-1})^x (a_1 a_2 \cdots a_l)^{m-x}$

Claramente X es una l-coloración de $C_n(1,2,\ldots,k)$, entonces

$$\chi(C_n(1,2,\ldots,k)) \leq l = \lceil \tfrac{n}{m} \rceil$$

Y por el lema 3.3.4, se tiene que

$$\lceil \tfrac{n}{m} \rceil \leq \chi(C_n(1,2,\ldots,k))$$

Por lo tanto,

$$\chi(C_n(1,2,\ldots,k)) = \lceil \tfrac{n}{m} \rceil.$$

□