



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

SOBRE LA CLASIFICACIÓN DE LAS ESTRATIFICIONES TRIVALENTES CON GRUPO FUNDAMENTAL \mathbb{Z}_2

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

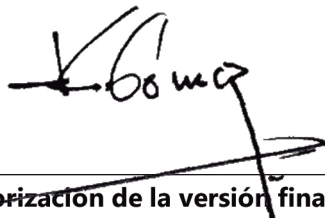
Matemáticas Básicas

Presenta

Juan Carlos Cruz González

Director de Tesis:

Dr. José Carlos Gómez Larrañaga



Autorización de la versión final

Esta tesis está dedicada a:

Mis padres: María y Juan, por ser las personas que siempre han estado presentes en mi vida, y porque desde los inicios de mi carrera profesional y a pesar de todo contratiempo, ellos buscaron la manera de poder apoyarme en mis estudios, además de brindarme sus consejos y guiarme por un buen camino, dándome las fuerzas para seguir adelante y no desistir al primer tropiezo que se presente, enseñándome a encarar las adversidades sin perder nunca la dignidad ni desfallecer en el intento.

A mi novia María Janeth, por su apoyo incondicional, durante todo este proceso, por estar conmigo en todo momento(a pesar de la distancia).

A mis hermanos, por su apoyo, y por estar siempre presentes dándome ánimos.

Agradecimientos

Agradezco a toda mi familia por estar siempre brindándome su apoyo en todo momento.

A mi novia que desde que la conocí me ha brindado su apoyo y ha estado presente en cualquier proyecto que he emprendido.

Al Dr. José Carlos Gómez Larrañaga por haber aceptado ser mi asesor de tesis, y por el tiempo dedicado a este y por su preocupación en cuanto a mi futuro profesional.

Quiero extender también mis agradecimientos a todo el personal que labora en el Centro de Investigación en Matemáticas A.C.(CIMAT) por las facilidades brindadas durante mi estancia en esta institución y a ésta por darme la oportunidad de estudiar la Maestría en Matemáticas Básicas.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca que me fue otorgada (no.635855) y que recibí durante los dos años de maestría.

A mis compañeros de generación y amigos, quienes por su amistad, compañerismo, y gratos momentos hicieron de mi estancia en CIMAT una de las mejores etapas de mi vida.

A la comunidad CIMAT que me ayudaron a equilibrar la parte académica con aquella parte deportiva, por todos los momentos y los fuertes lazos que aprendí a formar a nivel personal.

Índice general

1. Estratificies	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Estratificies y sus gráficas	2
1.3. Estratificies lineales	9
1.4. Estratificies trivalentes	11
2. Clasificación de las estratificies con grupo fundamental trivial	13
2.1. Construyendo gráficas trivalentes con todas sus aristas con etiqueta 1	13
2.2. Construyendo gráficas	15
2.3. Un teorema de clasificación	19
3. Una clasificación de las estratificies con grupo fundamental \mathbb{Z}_2	21
4. Estratificies con frontera y espacios espuma	28
4.1. Estratificies con frontera	28
4.2. Espacios espuma	31
4.2.1. Descomposición de Heegaard	32
4.2.2. Asociando un espacio espuma a una 3-variedad	35
4.2.3. Grapumas	40
Bibliografía	46

Introducción

Las estratificies son una generalización de las 2-variedades en las que hay curvas cerradas simples separadas, donde se encuentran varias hojas. Sabemos que las 2-variedades son clasificadas en términos de su grupo fundamental, pero para una determinada estratificie X hay una infinidad de estratificies no homeomorfas con el mismo grupo fundamental que X . El objetivo del presente trabajo es principalmente estudiar a las estratificies.

En el primer capítulo definiremos lo que es una estratificie X , le asociaremos una gráfica Γ_X bipartita con aristas y vértices etiquetados, la gráfica Γ_X consiste de vértices «blancos» y «negros» que corresponden a las partes de 2-variedades y a curvas cerradas simples, respectivamente; junto con un etiquetamiento de aristas y vértices, Γ_X esencialmente determina X , es decir, dada una estratificie podemos asociarle una gráfica bipartita etiquetada y viceversa. Probaremos que existe una retracción de X a Γ_X . La gráfica Γ_X es un árbol cuando $\pi_1(X)$ es finito. Obtendremos información de $\pi_1(X)$ a partir de Γ_X , por ejemplo, daremos una presentación del grupo fundamental $\pi_1(X)$ cuando Γ_X tiene todos sus vértices blancos de género cero. Demostraremos que si $H_1(X, \mathbb{Z}_2) = 0$, entonces todos los vértices blancos de Γ_X tienen género 0 y si $H_1(X) = \mathbb{Z}_2^m$ para algún $m \geq 0$, entonces todos los vértices terminales son blancos. Este primer capítulo finalizará hablando de las estratificies lineales y estratificies trivalentes.

El capítulo 2 se centra en el problema de clasificación de las estratificies con grupo fundamental trivial, en este capítulo probamos un primer resultado que afirma que si X es una estratificie simplemente conexa entonces es homotópicamente equivalente a una cuña de $m - n$ 2-esferas, donde m (respectivamente n) es el número de vértices blancos (respectivamente negros) del árbol Γ_X . Proporcionamos un algoritmo para determinar cuándo una estratificie X es 1-conexa. Probaremos la siguiente equivalencia: Si X es trivalente, entonces es 1-conexa si y solo si $H_1(X; \mathbb{Z}_6) = 0$. Finalmente definiremos operaciones sobre Γ_X a las que llamamos $O1$, $O2$ y $O1^*$. Demostraremos que las operaciones $O1$, $O2$ no modifican el grupo fundamental de X . Terminaremos este capítulo mostrando que todas las estratificies trivalentes con grupo fundamental trivial son construibles mediante las operaciones antes mencionadas y damos un teorema de clasificación.

El capítulo 3 básicamente es dar un teorema de clasificación para las estratificies trivalentes con grupo fundamental \mathbb{Z}_2 . Este capítulo damos como un primer resultado: Si X tiene grupo fundamental \mathbb{Z}_2 , entonces Γ_X es un árbol, todos sus vértices terminales de Γ_X son blancos, tiene a lo más un vértice blanco de género distinto de cero, más aún este género debe ser -1 y la 2-variedad que representa es una banda de *Möbius* agujereada. Proporcionamos ejemplos de estratificies trivalentes que no tienen grupo fundamental \mathbb{Z}_2 y cumplen las propiedades antes mencionadas. Definiremos una operación $O3$ sobre Γ_X , y bajo esta operación junto con $O1$, $O2$, $O1^*$ damos un teorema de clasificación para las estratificies con grupo fundamental \mathbb{Z}_2 .

El capítulo 4, consiste en introducir nuevos conceptos, definiremos lo que para nosotros será una estratificie con frontera, un espacio espuma, y siguiendo el espíritu de los capítulos previos, para las estratificies con frontera probaremos algunos resultados análogos a las estratificies y para los espacios espuma buscamos resultados similares. En esencia este capítulo su intención es plantear un problema de clasificación de estos espacios y sembrar la semilla en una dirección para el estudio de este.

Estratificies

1.1. Preliminares

En esta tesis se supondrá que ya se tienen los conocimientos básicos de teoría de gráficas, topología general y algebraica. Enseguida se dará la notación que se usará a lo largo de este documento.

Recordemos que Top denota la categoría de espacios topológicos.

- Para cada $X \in Top$, τ_X denotará su topología y para cada $A \subset X$:

$\mathcal{V}_A(X) := \{U \subset X : A \subset \text{int}_X(U)\}$ es la colección de vecindades de A en X .

$\overset{\circ}{\mathcal{V}}_A(X) := \{U \subset X : A \subset U, U \tau_X\}$ es la colección de vecindades abiertas de A en X .

Cuando no exista confusión en el contexto hablado, solo escribiremos \mathcal{V}_A , y $\overset{\circ}{\mathcal{V}}_A$.

- Para $X \in Top$ el conjunto de sus componentes conexas lo denotaremos por $\mathcal{C}(X)$, esto es;

$$\mathcal{C}(X) := \{W \subset X : W \text{ es conexa maximal}\}.$$

- Para cada $X, Y \in Top$ el conjunto de funciones continuas es definido como:

$$\mathcal{C}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y : f \text{ es continua}\}.$$

- Se dice que $X, Y \in Top$ son homeomorfos si existe $h \in \mathcal{C}(X, Y)$ biyectiva tal que $h^{-1} \in \mathcal{C}(Y, X)$. Nosotros denotaremos esto como $X \cong Y$. Ahora, si $X \cong Y$, denotaremos al conjunto de homeomorfismos de X y Y como sigue;

$$Homeo(X, Y) := \{h \in \mathcal{C}(X, Y) : h \text{ es homeomorfismo}\}.$$

- Para $X \in Top$, el cono abierto CX es el espacio cociente

$$CX := X \times (0, 1] / X \times \{1\}.$$

- Para $X \in Top$, el cono cerrado $C(X)$ es el espacio cociente

$$C(X) := X \times [0, 1] / X \times \{1\}.$$

- Llamaremos a $\mathbb{D}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq 1\}$ disco (cerrado) n -dimensional ($n \geq 1$). Si $n = 1$, denotaremos \mathbb{D}^1 como I .
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $L^n := \{1, \dots, n\}$.
- $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$
- Sea $X \in Top$ y $f \in Homeo(X, X)$. El toro de f se define como

$$X_f = X \times I / (x, 1) \sim (f(x), 0)$$

- Una n -variedad M es cerrada si M es compacta y sin frontera.

Por último, dada una gráfica Γ , denotaremos por $V(\Gamma)$ al conjunto de vértices de Γ , por $\mathcal{F}(\Gamma)$ los vértices finales de Γ y $A(\Gamma)$ al conjunto de aristas de Γ ; así $\Gamma = (V(\Gamma), A(\Gamma))$. Si $x, y \in V(\Gamma)$ y hay una arista que las conecta, denotaremos a esta arista como $\{x, y\}$. Si una arista $\{x, y\}$ tiene etiqueta θ , denotaremos esto como $\{x, y\}_\theta$.

1.2. Estratificies y sus gráficas

Definición 1.2.1. Una *estratificie* X es un espacio topológico segundo numerable, Hausdorff, compacto, conexo junto con una filtración $\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset X_2 = X$ tales que:

- X_1 es una 1-variedad cerrada.
- Para cada $x \in X_1$ existe $U_x \in \mathcal{V}_x$, $n = n_x \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq 3$ y $U_x \cong \mathbb{R} \times CL^n$.
- Para cada $x \in X_2 \setminus X_1$ existe $U_x \in \mathcal{V}_x$ tal que $U_x \cong \mathbb{R}^2$.

Denotemos al conjunto de las estratificies como \mathcal{E} , esto es, $\mathcal{E} := \{X \in Top : X \text{ es estratificie}\}$.

Proposición 1.2.2. Sea $X \in \mathcal{E}$ tenemos que:

- Para cada $C \in \mathcal{C}(X_1)$, $C \cong \mathbb{S}^1$.
- Para cada $C \in \mathcal{C}(X_1)$ existe $d = d_C \in \mathbb{N}$, $h \in Homeo(C(L^d), C(L^d))$ y existe $N(C) \in \mathcal{V}_C$ regular, tales que $h|_{L^d \times \{0\}} = \pi \in S_d$, $N(C) \cong N_\pi(C) := C(L^d)_h$.
- En (ii) si π' es conjugado de π , entonces $N_{\pi'}(C) \cong N_\pi(C)$.

Dem.

Sea $X \in \mathcal{E}$.

- Dado que X_1 es una 1-variedad cerrada, es decir, es compacta y sin frontera, entonces por la clasificación de las 1-variedades se sigue inmediatamente que para cada $C \in \mathcal{C}(X_1)$, $C \cong \mathbb{S}^1$.
- Sea $C \in \mathcal{C}(X_1)$. Por definición tenemos que para cada $x \in X_1$, existe $U_x \in \mathcal{V}_x$, $n = n_x \in \mathbb{N}$ tales que $L_x = L^n$ y $U_x \cong \mathbb{R} \times CL_x$ y $|L_x| > 2$.

Así, $C \subseteq \bigcup_{x \in W} U_x$ y por compacidad se sigue que existen $x_1, \dots, x_n \in C$ tales que $C \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{x_j}$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que:

(a) para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, $C \not\subseteq \bigcup_{j=1, j \neq k}^n U_{x_j}$, es decir, n es mínima.

(b) $C = X_1 \cap \bigcup_{j=1}^n U_{x_j}$.

Ahora, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ sea μ_j el punto de cono de CL_{x_j} y sea $\phi_j : U_{x_j} \rightarrow \mathbb{R} \times CL_{x_j}$ homeomorfismo.

Afirmación-1: Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $\phi_j^{-1}(\mathbb{R} \times \{\mu_j\}) \subseteq C$ y $\bigcup_{j=1}^n \phi_j^{-1}(\mathbb{R} \times \{\mu_j\}) = C$.

Prueba:

Sea $j \in \{1, \dots, n\}$, supongamos que existe $a \in \mathbb{R} \times \mu_j$ tal que $\phi_j^{-1}(a) \notin C$, entonces por (b) $\phi_j^{-1}(a) \in X_2 \setminus X_1$, por lo que existe una vecindad $V_{\phi_j^{-1}(a)} \subset U_{x_j}$ y $V_{\phi_j^{-1}(a)} \cong \mathbb{R}^2$ de $\phi_j^{-1}(a)$, dado que ϕ_j es homeomorfismo, se sigue que $\phi_j(V_{\phi_j^{-1}(a)})$ es una vecindad de a homeomorfa a \mathbb{R}^2 , lo cual no es posible, pues $a \in \mathbb{R} \times \mu_j$, por lo tanto

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \phi_j^{-1}(\mathbb{R} \times \{\mu_j\}) \subseteq C.$$

Por último, sea $x \in C$, dado que $C \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{x_j}$, entonces existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in U_{x_j}$.

Supongamos que $\phi_j(x) \notin \mathbb{R} \times \{\mu_j\}$, entonces $\phi_j(x)$ está en una de las hojas de $\mathbb{R} \times CL_{x_j}$, por lo que existe una vecindad $V_{\phi_j(x)}$ homeomorfa a \mathbb{R}^2 de $\phi_j(x)$, y dado que ϕ_j es homeomorfismo se sigue que $\phi_j^{-1}(V_{\phi_j(x)})$ es una vecindad de x homeomorfa a \mathbb{R}^2 , lo cual no es posible, pues $x \in C$, por lo tanto,

$$\bigcup_{j=1}^n \phi_j^{-1}(\mathbb{R} \times \{\mu_j\}) = C.$$

En consecuencia, la Afirmación-1 es verdadera.

Ahora, como $C \in \mathcal{C}(X_1)$, $C \cong S^1$ y para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $U_{x_j} \cong \mathbb{R} \times CL_{x_j}$, de manera que podemos suponer que $C = S^1$ y para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $U_{x_j} = \mathbb{R} \times CL_{x_j}$. Más aún, nosotros podemos suponer que $U_{x_j} \cap U_{x_{j+1}} \neq \emptyset$, $j = 1, \dots, n-1$ (reordenando si es necesario) y $U_{x_j} \cap X_1 = \emptyset$.

Evidentemente para cada $j \in \{1, \dots, n-1\}$, $U_{x_j} \cap U_{x_{j+1}} \cong \mathbb{R} \times CL$, para algún L finito.

Afirmación-2: $L_{x_1} = \dots = L_{x_n}$.

Prueba.

Sea $j \in \{1, \dots, n-1\}$, sabemos que $U_{x_j} \cap U_{x_{j+1}} \cong \mathbb{R} \times CL$, para algún L_j finito, así, sea $\varphi_j : U_{x_j} \cap U_{x_{j+1}} \rightarrow \mathbb{R} \times CL_j$ homeomorfismo. En virtud de la Afirmación-1 se sigue inmediatamente que:

$$\varphi_j(\mathbb{R} \times \{\mu_j\} \cap \mathbb{R} \times \{\mu_{j+1}\}) = \mathbb{R} \times \{\omega_j\}, \text{ donde } \omega_j \text{ es el punto de cono de } \mathbb{R} \times CL_j.$$

Por el inciso (b) de estratificación, se concluye que $L_j = L_{x_j} = L_{x_{j+1}}$, como consecuencia inmediata tenemos que $L_{x_1} = \dots = L_{x_n}$, lo cual prueba lo afirmado. Más aún, las hojas de cada $\mathbb{R} \times CL_{x_j}$ coinciden.

Ahora, sea $L = L_{x_1} = \dots = L_{x_n}$ considerando todo lo anterior se sigue que en $\bigcup_{j=2}^n U_{x_j}$ hay una vecindad U de $\bigcup_{j=2}^n \phi_j^{-1}(\mathbb{R} \times \{\mu_j\})$ tal que $U \cong \mathbb{R} \times CL$.

Hasta aquí, tenemos que $C \subseteq U \cup U_{x_1}$ y ni U ni U_{x_1} no cubren C por si solos. Sean α el punto de cono de $\mathbb{R} \times CL$ y sean $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R} \times CL$, $\varphi_1 : U_{x_1} \rightarrow \mathbb{R} \times CL$ homeomorfismos. Dado que U y U_{x_1} no cubren por si solos a C , entonces podemos tomar $t \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta = \varphi^{-1}(\{t\} \times CL) = \varphi_1^{-1}(\{t\} \times CL)$ y $C \not\subseteq (U \cup U_{x_1}) \setminus \Delta$. Con argumentos análogos a los anteriores tendremos que existe una $W \subset U \cup U_{x_1}$ tal que $W \cong \mathbb{R} \times CL$ y $C \subset W \cup \Delta$, pero $C \not\subseteq W$. Unir W con Δ podemos pensarlo como ponerle a W en cada extremo Δ y el pegado final es mediante un homeomorfismo $h : \Delta \rightarrow \Delta$ que es prácticamente un homeomorfismo de $C(L)$ a $C(L)$, y sabemos que por ser h un homeomorfismo $h(L) = L$, es decir, h queda totalmente determinado por una permutación $\pi \in S_d$, donde $L = \{1, \dots, d\}$.

Se concluye que para cada $C \in \mathcal{C}(X_1)$ existe $d = d_C \in \mathbb{N}$, $h \in \text{Homeo}(Y, Y)$ y existe $N(C) \in \mathcal{V}_C$ regular, tales que $N(C) \cong N_\pi(C)$, $h|_F = \pi \in S_d$, donde:

$$N_\pi(C) := (Y \times [0, 1]) / (y, 1) \sim (h(y), 0) \text{ y } Y = C(L) \text{ y } L = \{1, \dots, d\}.$$

(iii) Sabemos que dos permutaciones conjugadas tienen el mismo ciclo de estructura, en consecuencia, se cumple lo deseado. □

De manera que podemos pensar que π es una clase conjugada en S_d . Sabemos que hay una correspondencia 1-1 entre las clases de conjugación de S_d y las particiones de d , esta correspondencia es específicamente la estructura de ciclo, además el número de clases conjugadas de S_d coincide con el número $p(d)$ de particiones distintas de d (p se conoce como función partición). Así, una componente de $\partial N_\pi(C)$ (el conjunto de puntos que tienen una vecindad abierta homeomorfa a \mathbb{H}) corresponde a una suma de la partición π , se sigue de los Teoremas 2 y 3 de [4] que $N_\pi(C) = N(C)$ para una única partición π .

Sea $X \in \mathcal{E}$. Para cada par $C, C' \in \mathcal{C}(X_1)$ distintos, tomamos $N(C) \in \mathcal{V}_C$, $N(C') \in \mathcal{V}_{C'}$ suficientemente pequeñas tal que $N(C) \cap N(C') = \emptyset$. Llamemos a las cerraduras de las componentes $N(C) \setminus C$ las hojas de $N(C)$.

Ahora, construimos una gráfica bipartita conexa Γ_X asociada a la estratificación X .

Escribimos $M = \overline{X \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}(X_1)} N(C)}$. Los vértices blancos de la gráfica Γ_X son las componentes conexas de M ; los vértices negros son las $N(C)$, $C \in \mathcal{C}(X_1)$. Una arista es una componente conexa S de ∂M ; un vértice blanco W con un vértice negro $N(C)$ si $S = W \cap N(C)$.

Obtenemos una realización geométrica de Γ_X como un encaje en X de la siguiente manera: en cada componente C_j de X_1 escogemos un vértice negro b_j , en el interior de cada componente W_i de $M = \overline{X \setminus \bigcup_j N(C_j)}$ escogemos un vértice blanco w_i . En cada componente S_{ij} de $W_i \cap N(C_j)$ escogemos un punto y_{ij} , un arco α_{ij} en W_i de w_i a y_{ij} y un arco β_{ij} de y_{ij} a b_j en la hoja de $N(C_j)$ que contiene a y_{ij} . Una arista e_{ij} entre w_j y b_j consiste en el arco $\alpha_{ij} * \beta_{ij}$. Para i fijo, los arcos α_{ij} son escogidos para conectarse con w_i .

La siguiente imagen nos proporciona una idea de lo anterior:

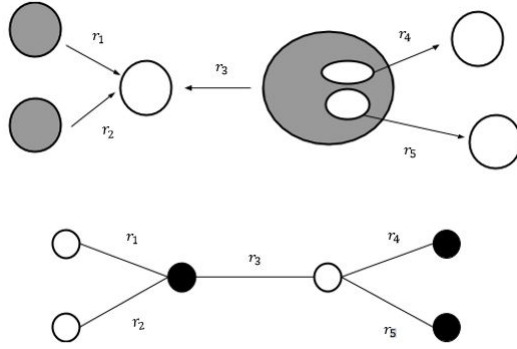


Figura 1.1: [2]

Definición 1.2.3. Sea $X \in \mathcal{E}$.

- $\mathcal{B}_X := \{v \in V(\Gamma_X) : v \text{ es blanco} \}$
- $\mathcal{N}_X := \{v \in V(\Gamma_X) : v \text{ es negro} \}$
- $\mathcal{G} := \{\Gamma_X : X \in \mathcal{E}\}$

El siguiente lema es importante.

Lema 1.2.4. Para cada $X \in \mathcal{E}$ existe una retracción $r : X \rightarrow \Gamma_X$.

Dem.

Para cada componente W_i de M , la unión de los arcos $\bigcup_j \alpha_{ij}$ es un cono en los puntos y_{ij} con punto de cono w_i , así $\bigcup_j \alpha_{ij}$ puede considerarse como un retracto de $I \times I$ y por lo tanto tiene la propiedad de extensión de Tietze. Así el mapeo $\bigcup_j \alpha_{ij} \cup \partial W_i \rightarrow \bigcup_j \alpha_{ij}$ que es la identidad en $\bigcup_j \alpha_{ij}$ y tal que ∂W_i se retrae a $\bigcup_j y_{ij}$ se extiende a una retracción de W_i a $\bigcup_j \alpha_{ij}$. Similarmente hay una retracción de $N(C_j)$ a $\bigcup_j \beta_{ij}$. Dado que las retracciones coinciden en $W_i \cap N(C_j) \rightarrow \{y_{ij}\}$, entonces las combinamos para producir una retracción $r : X \rightarrow \Gamma_X$.

□

Corolario 1.2.5. Sea $X \in \mathcal{E}$. Si $\pi_1(X)$ es finito, entonces Γ_X es un árbol.

Dem.

Sea $X \in \mathcal{E}$ con $\pi_1(X)$ finito. Por el lema 1.2.4 se sigue que $\pi_1(\Gamma_X)$ es finito. Sabemos que el grupo fundamental de las gráficas tiene grupo fundamental infinito ó trivial. Por tanto, $\pi_1(\Gamma_X)$ es trivial, y esto solo ocurre si Γ_X es un árbol.

□

A partir de aquí para cada $X \in \mathcal{E}$ denotaremos como r_X la retracción del lema 1.2.4 asociado a X .

Ahora asignamos etiquetas a los vértices de Γ_X . Si F es una superficie compacta, $g(F)$ será su género, con la convención de que $g(F) < 0$, si F es no orientable. Así $g(\mathbb{P}^2) = g(Mb) = -1$, $g(K) = -2$, etc., donde Mb es la banda de Möbius y K es la botella de Klein.

Un vértice $v \in \mathcal{B}_X$ es etiquetado con el género $g = g(r_x^{-1}(v))$ (como en la convención definida arriba) y diremos que v tiene género g . Si $v \in \mathcal{B}_X$ no tiene etiqueta se supondrá que tiene etiqueta 0 a menos que se diga lo contrario. Una arista $S \in A(\Gamma_X)$ es etiquetado por n , donde n es un sumando de la partición π correspondiente a la componente S de $\partial N_\pi(C)$ donde $S \subset \partial N_\pi(C)$.

Note que no hay necesidad de etiquetar a los vértices negros con la partición π por que la partición es mostrada por las etiquetas de las aristas adyacentes. También note que el número de componentes frontera de W es el número de aristas adyacentes de W .

Observación 1.2.6 (Generadores y relaciones de $\pi_1(X_\Gamma)$). Si Γ_X es un árbol con todos vértices blancos de Γ_X de género 0, entonces $\pi_1(X_\Gamma)$ tiene una presentación natural con generadores:

$$\{b\}_{b \in \mathcal{N}_X},$$

$\{c_1, \dots, c_p\}_{w \in \mathcal{B}_X}$ (aquí c_1, \dots, c_p corresponden a las curvas frontera de los p -agujeros de S^2 que corresponden a w , en otras palabras, tendremos un generador por cada arista)

y relaciones:

$$c_1 \cdots c_p = 1, \text{ uno para cada } w \in \mathcal{W},$$

$$b^m = c_i, \text{ para cada arista } c_i \in \Gamma_X \text{ entre } w \text{ y } b \text{ con etiqueta } m \geq 1 \text{ (correspondiente a } W \cup N(C_b), C_b \in \mathcal{C}(X_1)).$$

Por ejemplo, para la gráfica de la figura 1.1 leemos la siguiente presentación de

$$\pi_1(X_\Gamma) = \{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 : c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 c_4 c_5 = 1, b_1^{r_1} = c_1, b_2^{r_2} = c_2, b_3^{r_3} = c_3, b_3^{r_4} = c_4, b_3^{r_5} = c_5\} = \{b_1, b_2, b_3 : b_1^{r_1} = 1, b_2^{r_2} = 1, b_3^{r_3+r_4+r_5} = 1\} = \mathbb{Z}_{r_1} * \mathbb{Z}_{r_2} * \mathbb{Z}_{r_3+r_4+r_5}.$$

Definición 1.2.7. Dada una estratificie X , diremos que T es un subcomplejo de X si

- $T \subset X$
- $T = r_X^{-1}(\Gamma')$, donde Γ' es una subgráfica de Γ_X .

Ahora, sea $X \in \mathcal{E}$, $\Gamma = \Gamma_X$ y T un subcomplejo de X . Sea \hat{T} el cociente de X obtenido por colapsar la cerradura de cada componente de $X \setminus T$ a un punto (los puntos son distintos para cada componente). Note que \hat{T} es una estratificie cuya gráfica $\hat{\Gamma}'$ es la unión de Γ' y las aristas etiquetadas (con sus vértices) de $st(\Gamma') - \Gamma'$ los cuales son adyacentes a los vértices negros de Γ' . (Aquí $st(\Gamma')$ es la estrella de Γ').

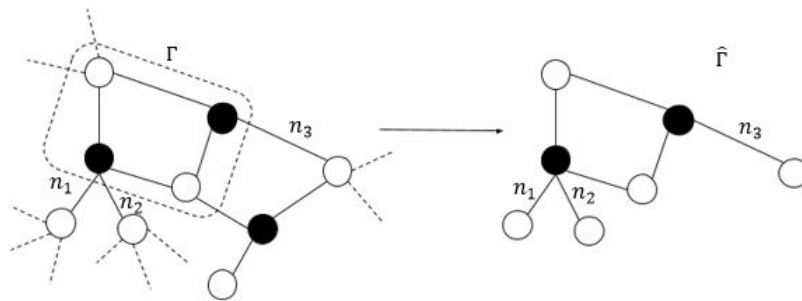


Figura 1.2: [1]

Entonces $\pi(\hat{T})$ es un cociente de $\pi(X)$ y similarmente $H_1(\hat{T})$ y $H_1(\hat{T}; \mathbb{Z}_2)$ son cocientes de $H_1(X)$ y $H_1(X; \mathbb{Z}_2)$, respectivamente.

Para el siguiente teorema tengamos presente la siguiente notación y concepto:

- S_g denota la superficie cerrada de género g (es decir, compacta y sin frontera).

- Sea Γ es una gráfica bicolorada y etiquetada que representa una estratificación X , y sea Γ' una subgráfica de Γ . Podar Γ en Γ' significará eliminar vértices y aristas de Γ hasta obtener una subgráfica de Γ con el mínimo número de aristas y vértices, que tenga como subgráfica a Γ' y represente una estratificación (obviamente, no toda subgráfica de Γ representa una estratificación).

Teorema 1.2.8. Sea $\Gamma = \Gamma_X$ cualquier gráfica de una estratificación $X = X_\Gamma$.

- Si Γ tiene al menos dos vértices terminales negros, entonces existe un epimorfismo $\pi_1(X_\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}_m * \mathbb{Z}_n$ para algunos $m, n \geq 3$
- Si Γ tiene un vértice terminal negro y tiene un vértice blanco de género g , entonces existe un epimorfismo $\pi_1(X_\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}_m * \pi(S_g)$, para algún $m \geq 3$
- Si existen $v_1, v_2 \in \mathcal{B}_X$ tal que $g_i = g(r_X^{-1}(v_i))$, $i = 1, 2$, entonces existe $h : \pi_1(X_\Gamma) \rightarrow \pi_1(S_{g_1}) * \pi(S_{g_2})$ epimorfismo.

Dem.

(a) Sea L una subgráfica lineal de Γ_X con vértices negros terminales b_1, b_2 . Sin pérdida de generalidad supongamos que:

- $V(L) = \{b_1, x_1, \dots, x_r, b_2\}$
- $A(L) = \{\{b_1, x_1\}_m, \{x_1, x_2\}_{\theta_1}, \dots, \{x_r, b_2\}_n\}$

Obsérvese que para $i \in \{1, \dots, r\}$; si i es impar, entonces $x_i \in \mathcal{B}_X$ y si es par entonces $x_i \in \mathcal{N}_X$, esto es por que Γ_X es bipartita. Para cada $x_i \in \mathcal{B}_X$ su etiqueta será g_i .

Ahora procedamos a podar Γ en L y en la gráfica resultante construye L_{mn} eliminando todas las aristas (junto con sus vértices blancos) de cada vértice negro interior b , luego uniendo a b una arista con etiqueta 1 (junto con un vértice blanco) y finalmente cambiando la etiqueta de todos los vértices blancos a 0 (ver figura 1.3). Esto tiene el efecto de matar $r^{-1}(b)$ en $\pi_1(X)$. Ahora, en virtud de la observación 1.2.6 se sigue inmediatamente que $\pi_1(L_{mn}) = \langle b_1, b_2 : b_1^m = 1, b_2^n = 1 \rangle = \mathbb{Z}_m * \mathbb{Z}_n$. Entonces existe un epimorfismo $\pi_1(X_\Gamma) \rightarrow \pi_1(X_{L_{mn}}) \cong \mathbb{Z}_m * \mathbb{Z}_n$.

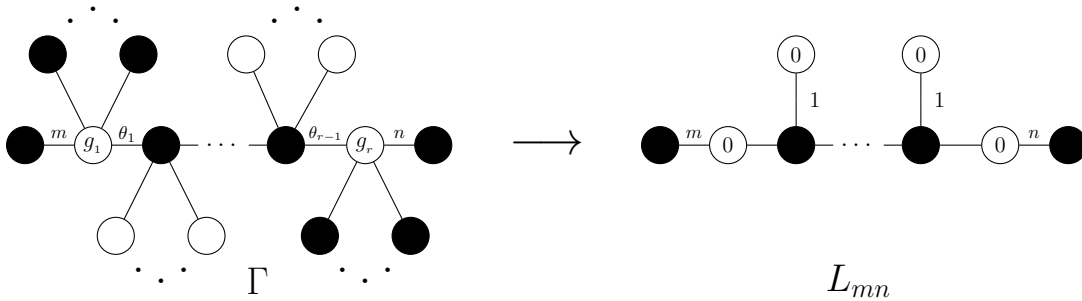


Figura 1.3

(b) Sea L una subgráfica lineal de Γ_X con un vértice terminal negro b y uno blanco w de género g . Sin pérdida de generalidad supongamos que:

- $V(L) = \{b, x_1, \dots, x_r, w\}$
- $A(L) = \left\{ \{b_1, x_1\}_m, \{x_1, x_2\}_{\theta_1}, \dots, \{x_r, w\}_{\theta_r} \right\}$

Obsérvese que para $i \in \{1, \dots, r\}$; si i es impar, entonces $x_i \in \mathcal{B}_X$ y si es par entonces $x_i \in \mathcal{N}_X$, esto es por que Γ_X es bipartita. Para cada $x_i \in \mathcal{B}_X$ su etiqueta será g_i , en particular, $g_r = g$.

Construyamos una gráfica L_{mg} como en (a) con vértices terminales b y w . Entonces hay un epimorfismo $\pi_1(X_\Gamma) \longrightarrow \pi_1(X_{L_{mg}})$. Si L_{mg} no es la gráfica de una arista, entonces $\pi_1(X_{L_{mg}}) \cong \mathbb{Z}_m * \pi_1(S_g)$, si L_{mg} es la gráfica de una arista entonces $\mathbb{Z}_m * \pi_1(S_g)$ es un cociente de $\pi_1(X_{L_{mg}})$.

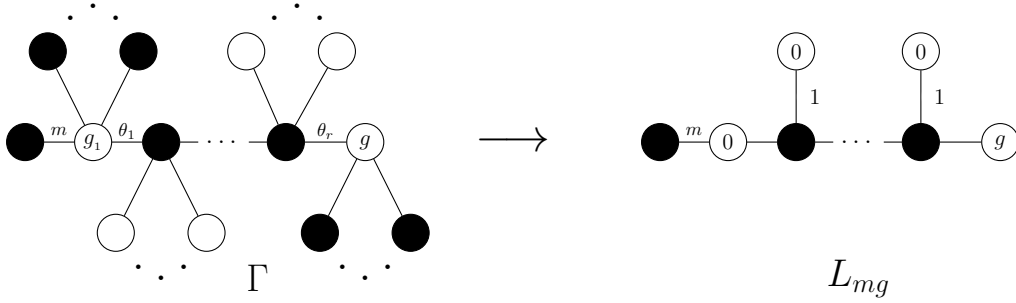


Figura 1.4

(c) Sea L una subgráfica lineal de Γ_X con vértices terminales blancos w_1 y w_2 . Sin pérdida de generalidad supongamos que:

- $V(L) = \{w_1, x_1, \dots, x_r, w_2\}$
- $A(L) = \left\{ \{w_1, x_1\}_m, \{x_1, x_2\}_{\theta_1}, \dots, \{x_r, w_2\}_{\theta_r} \right\}$

Obsérvese que para $i \in \{1, \dots, r\}$; si i es impar, entonces $x_i \in \mathcal{N}_X$ y si es par entonces $x_i \in \mathcal{B}_X$, esto es porque Γ_X es bipartita. Para cada $x_i \in \mathcal{B}_X$ su etiqueta será g'_i .

Construyamos una gráfica $L_{g_1 g_2}$ como en (b) con vértices terminales w_1 y w_2 . Entonces hay un epimorfismo $\pi_1(X_\Gamma) \longrightarrow \pi_1(X_{L_{g_1 g_2}})$.

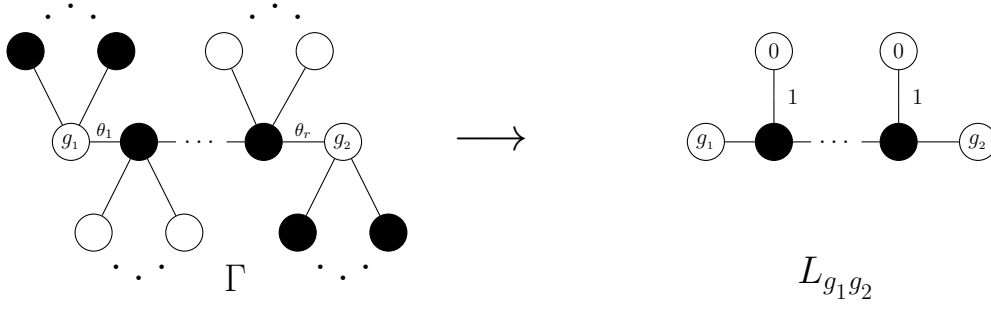


Figura 1.5

□

Teorema 1.2.9.

- (a) Si $H_1(X; \mathbb{Z}_2) = 0$, entonces para cada $v \in \mathcal{B}_X$, $0 = g(r_X^{-1}(v))$
- (b) Si $H_1(X) = \mathbb{Z}_2^m$ para algún $m \geq 0$, entonces todos los vértices terminales son blancos.

Dem.

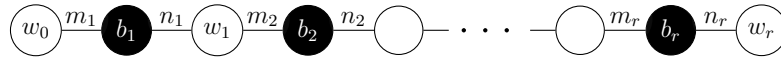
Sea $X \in \mathcal{E}$.

- (a) Si T es un vértice blanco entonces \hat{T} es una 2-variedad cerrada y ya que $H_1(X; \mathbb{Z}_2) = 0$ el género asociado a T es 0.
- (b) Note que un vértice terminal negro T de Γ_X correspondiente $\partial N_\pi(C)$ (con $\partial N_\pi(C)$ conexa) y la etiqueta n de la arista adyacentes a T es el orden de π (un n -ciclo) que define $N_\pi(C)$, entonces $n \geq 3$ y $H_1(\hat{T}) \cong \mathbb{Z}_n$. Por hipótesis esto no puede ocurrir.

□

1.3. Estratificies lineales

Ahora consideremos las estratificies $X(m_1, n_1, \dots, m_r)$ cuya gráfica asociada $G = G(m_1, n_1, \dots, m_r)$ es la gráfica lineal con vértices sucesivos $w_0, b_1, \dots, b_r, w_r$ y sucesivas etiquetas m_1, n_1, \dots, m_r donde m_i (respectivamente n_i) es la etiqueta de la arista que une b_i con w_{i-1} (respectivamente w_i) para $i = 1, \dots, r$ y todos lo vértices blancos tienen género 0.



El grupo fundamental de X es el grupo

$$G_{m_1, n_1, \dots, m_r, n_r} = \{x_1, \dots, x_r : x_1^{m_1} = 1, x_1^{n_1} = x_2^{m_2}, \dots, x_{r-1}^{n_{r-1}} = x_r^{m_r}, x_r^{n_r} = 1\}.$$

Lema 1.3.1. Para m_i, n_j donde $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, r - 1$, sea

$$G_r = \{x_1, \dots, x_r : x_1^{m_1} = 1, x_1^{n_1} = x_2^{m_2}, \dots, x_{r-1}^{n_{r-1}} = x_r^{m_r}\}.$$

Si $\text{mcd}(m_i, n_j) = 1$ para $i \leq j \leq r-1$, entonces $G_r \cong \mathbb{Z}_m$, donde $m = m_1 \cdots m_r$.

Dem.

Primero notemos que

$$(*) \quad x_i^{m_1 m_2 \cdots m_i} = 1 \text{ para } i = 1, \dots, r.$$

Esto es trivial para $i = 1$. Por inducción, $1 = x_{i-1}^{m_1 \cdots m_{i-1}}$, y de $x_{i-1}^{n_{i-1}} = x_i^{m_i}$ se sigue que $1 = x_{i-1}^{n_{i-1} m_1 \cdots m_{i-1}} = x_i^{m_i m_1 \cdots m_{i-1}}$.

Ya que para $i = 1, \dots, r-1$, $x_i^{n_i} \in \langle x_{i+1} \rangle$ (El subgrupo cíclico generado por x_{i+1}) y $\text{mcd}(n_i, m_1 \cdots m_i) = 1$, se sigue de (*) que $x_i \in \langle x_{i+1} \rangle$, por tanto G_r es cíclico generado por x_r . Para ver que el orden de x_r no es menor que $m_1 \cdots m_r$, observemos que la matriz de relaciones

$$\begin{pmatrix} m_1 & & & & & & & \\ -n_1 & m_2 & & & & & & \\ & -n_2 & m_3 & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & -n_{r-1} & m_r & \end{pmatrix}$$

puede ser reducido a una matriz diagonal por operaciones elementales de filas y columnas, que deja el determinante invariante. Ya que G_r es cíclico, todas las entradas de la diagonal de la forma normal son iguales a 1, excepto para la última entrada, el cual es el orden de G_r .

□

Corolario 1.3.2. Si $\text{mcd}(m_i, n_j) = 1$ para $i \leq j \leq r$, entonces el grupo

$$G_{m_1, n_1, \dots, m_r, n_r} = \{x_1, \dots, x_r : x_1^{m_1} = 1, x_1^{n_1} = x_2^{m_2}, \dots, x_{r-1}^{n_{r-1}} = x_r^{m_r}, x_r^{n_r} = 1\}$$

es trivial.

Dem.

Por el lema 1.3.1 $G_{m_1, n_1, \dots, m_r, n_r} = \{x_r : x_r^{m_1 \cdots m_r} = 1, x_r^{n_r} = 1\}$. Ya que el $\text{mcd}(m_1 \cdots m_r, n_r) = 1$, el resultado se sigue inmediatamente.

□

Lema 1.3.3. Sea H_r el grupo abeliano

$$H_r = \{x_1, \dots, x_r : [x_i, x_j] = 1, x_1^{m_1} = 1, x_1^{n_1} = x_2^{m_2}, \dots, x_{r-1}^{n_{r-1}} = x_r^{m_r}, x_r^{n_r} = 1\}.$$

Si $H_r = 1$ entonces $\text{mcd}(m_i, m_j) = 1$ para $1 \leq i \leq j \leq r$.

Dem.

Si $r = 1$, $H_1 = \{x_1 : x_1^{m_1} = 1, x_1^{n_1} = 1\} = 1$ implica que $\text{mcd}(m_1, n_1) = 1$. Para $r > 1$, si $H_r = 1$, entonces $H_r / \langle x_r \rangle \cong H_{r-1} = 1$ y por lo tanto, por inducción $\text{mcd}(m_i, m_j) = 1$ para $i \leq j \leq r-1$. Se sigue del lema 1.3.1, que el grupo $G_r = \{x_1, \dots, x_r : x_1^{m_1} = 1, x_1^{n_1} = x_2^{m_2}, \dots, x_{r-1}^{n_{r-1}} = x_r^{m_r}\} = \{x_r : x_r^{m_1 \cdots m_r} = 1\}$. Entonces $H_r = G_r / \langle x_r^{n_r} \rangle = \{x_r : x_r^{m_1 \cdots m_r} = 1, x_r^{n_r} = 1\} = 1$.

□

Nosotros ahora establecemos el principal teorema de esta sección.

Teorema 1.3.4. Para la variedad $X = X(m_1, n_1, m_2, n_2, \dots, m_r)$ las siguientes son equivalentes:

- (1) X es simplemente conexo.

(2) $H_1(X) = 0$

(3) $\text{mcd}(m_i, n_j) = 1$ para $1 \leq i \leq j \leq r$.

Dem.

Claramente (1) implica (2). Ahora $H_1(X)$ es el grupo H_r del lema 1.3.3, por tanto (2) implica (3). Finalmente, (3) implica (1) por el corolario 1.3.2.

□

1.4. Estratificies trivalentes

En esta sección una estratificie X y Γ_X su gráfica asociada bicolorada y etiquetada se define trivalente, si cada $b \in \mathcal{N}_X$ es incidente a tres aristas cada una con etiqueta 1, ó a dos aristas: uno con etiqueta 1 y el otro con etiqueta 2, ó b es un vértice adyacente terminal con etiqueta 3. Esto significa que una vecindad de cada componente C del 1-esqueleto X_1 tiene 3 hojas, así la permutación $\pi : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ de la vecindad regular $N(C) = N_\pi(C)$ tiene partición $1 + 1 + 1$ ó $1 + 2$ ó 3 .

La siguiente figura 1.6 muestra un ejemplo simple con un vértice negro con partición $1 + 1 + 1$ y todas las aristas terminales con etiqueta 2 y vértices blancos de género 0. Un simple calculo muestra que la estratificie tiene grupo fundamental \mathbb{Z}_2 . De hecho, nosotros podemos demostrar que en general la homología es no trivial.

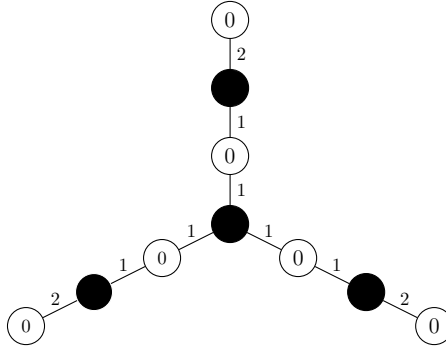


Figura 1.6: Un vértice de rama

Lema 1.4.1. *Si todas las aristas terminales de una gráfica trivalente Γ_X (con al menos una arista) tiene etiqueta 2, entonces $H_1(X; \mathbb{Z}_2) \neq 0$.*

Dem.

Un vértice de rama es un vértice de grado ≥ 3 . Una rama terminal es una subgráfica lineal conexa L de Γ_X que une un vértice de rama v a un vértice terminal de manera que ningún vértice de $L - \{v\}$ es un vértice de rama.

Note que todos los vértices terminales de Γ_X son blancos.

Supongamos que el lema es falso. Sea Γ_X un contraejemplo con el mínimo número de aristas $n > 0$. Si w es un vértice de rama blanco, entonces para el subcomplejo $T = r^{-1}(\Gamma')$, donde Γ' es el complemento de una componente de $\Gamma_X - \{w\}$, es decir, $\Gamma' = \Gamma_X - \text{una componente de } \Gamma_X - \{w\}$, así hay un epimorfismo $H_1(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(\hat{T}; \mathbb{Z}_2)$, el cual muestra que Γ' es un contraejemplo del lema con menos de n aristas,

pues w tiene grado ≥ 3 y todas las aristas de los vértices terminales de Γ' tienen etiqueta 2. Por lo tanto, Γ_X no tiene vértices de rama blancos.

Primero afirmamos que cada rama terminal de Γ_X tiene longitud 3 con etiquetas 2, 1, 1 (empezando del vértice terminal blanco).

Para ver esto, sea $w_1 - b_1 - w_2 - b_2 - \dots - w_r - b_r$ una rama terminal donde w_1 es el vértice terminal blanco y b_r es el punto rama (negro). Debemos tener que $r \geq 2$ ya que las etiquetas de $w_1 - b_1$ y $b_1 - w_2$ son 2 y 1, respectivamente, así que b_1 no puede ser un vértice rama. Supongamos que la etiqueta de la arista $w_2 - b_2$ es 2. Entonces, eliminamos las aristas $w_1 - b_1 - w_2$ de Γ_X y obtenemos un contraejemplo con $n - 2$ aristas. Por lo tanto, la etiqueta de $w_2 - b_2$ es 1. Si $r > 2$, entonces la etiqueta de $b_2 - w_3$ es 2 y para la subgráfica lineal $w_1 - b_1 - w_2 - b_2 - w_3$ de Γ_X el subcomplejo correspondiente Y tiene $H_1(Y, \mathbb{Z}_2) = 0$, lo cual un simple cálculo muestra que no es cierto. Por lo tanto, $r = 2$ y $b_r = b_2$ es un vértice rama con partición $1 + 1 + 1$, así que la rama terminal $w_1 - b_1 - w_2 - b_2$ tiene tamaño 3 y etiquetas 2, 1, 1.

Ahora, sea b un vértice rama más externa de Γ_X (esto es, un vértice terminal negro de el árbol obtenido de Γ_X eliminando todos sus ramas terminales). Si b es el único punto rama de Γ_X , es la gráfica de la figura 1.6, para el cual la estratificación correspondiente tiene \mathbb{Z}_2 -homología no trivial, una contradicción. En cualquier otro caso, dos ramas terminales de Γ_X tienen a b como punto final. Sea Γ' la gráfica que se obtiene de Γ_X reemplazando las dos ramas terminales por una gráfica lineal de una arista con el punto final b y etiqueta dos. La estratificación correspondiente a la unión de dos ramas tienen \mathbb{Z}_2 homología igual a \mathbb{Z}_2 y se deduce que la estratificación Y que corresponde a la gráfica Γ' tiene la misma \mathbb{Z}_2 -homología que X . Así Γ' es un contraejemplo con $n - 5$ aristas, contradiciendo la minimalidad de n .

□

Clasificación de las estratificies con grupo fundamental trivial

Tenemos la siguiente clasificación homotópica de las estratificies 1-conexas:

Teorema 2.0.1. *Si $X \in \mathcal{E}$ es simplemente conexa entonces X es homotópicamente equivalente a una cuña de $m - n$ 2-esferas, donde m (respectivamente n) es el número de vértices blancos (respectivamente negros) del árbol Γ_X .*

En particular, dos estratificies simplemente conexas tienen el mismo tipo de homotopía si y solo si tienen la misma «deficiencia» $m - n$ y la estratificie no es contraíble.

Dem.

Para ver que X es homotópicamente equivalente a una cuña de 2-esferas, nosotros seguimos la demostración del teorema 6.5 en [5]: dado que $\pi_1(X) = 1$ se sigue de Hurewicz que $\pi_2(X) \cong H_2(X)$. Ahora $H_2(X)$ es abeliano libre (ya que los elementos de torsión provienen de $H_3(X)$). Los mapeos $(S^2, *) \rightarrow (X, *)$ representan los generadores de $\pi_2(X, *)$ se combinan en un mapa $f : S^2 \vee S^2 \vee \dots \vee S^2 \rightarrow X$ que induce un isomorfismo $f_* : \pi_2(S^2 \vee S^2 \vee \dots \vee S^2) \rightarrow \pi_2(X)$. Ahora se deduce de Whitehead que f es una equivalencia homotópica.

Para contar el número de esferas en la cuña, recuerda que $X = M \cup N$, donde $M = \overline{X - N}$ y $N = \bigcup_j N(C_j)$ (y C_j son las componentes de X_1). La característica de Euler $\chi(X) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2$, donde β_i es el i -ésimo número de Betti de X . Ya que $\chi(N) = \chi(M \cap N) = 0$ y $\beta_1 = 0$, se sigue que $\beta_2 = \chi(M) - 1$, que también es el número de $S^2 \vee S^2 \vee \dots \vee S^2$. Ahora M es unión disjunta de m esferas ponchadas y el número total de agujeros es el número e de aristas de Γ_X . Por lo tanto, $\chi(M) = 2m - e$. Ya que Γ_X es un árbol, el número de vértices de Γ_X es $m + n = e + 1$. Se sigue que $\beta_2 = m - n$

□

2.1. Construyendo gráficas trivalentes con todas sus aristas con etiqueta 1

Sea $X \in \mathcal{E}$ tal que para cada $v \in \mathcal{B}_X$, $g(r_X^{-1}(v)) = 0$. Consideremos la siguiente operación $O1$ que cambia $\Gamma = \Gamma_X$ por $\Gamma_1 = \Gamma_{X_1}$:

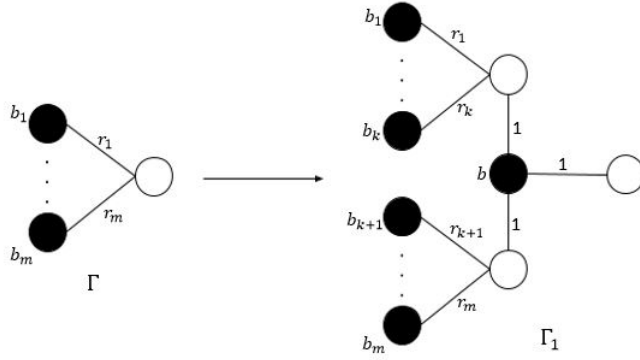


Figura 2.1: [2]

Si b_i es el vértice negro incidente en la arista etiquetada con r_i entonces la correspondiente relación $b_1^{r_1} \cdots b_m^{r_m} = 1$ en $\pi(X)$ se cambia a las relaciones $b_1^{r_1} \cdots b_k^{r_k} b = 1$, $b=1$, $b_{k+1}^{r_{k+1}} \cdots b_m^{r_m} = 1$ en $\pi(X_1)$ y se sigue que $\pi_1(X_1)$ es un cociente de $\pi_1(X)$. En particular notemos que :

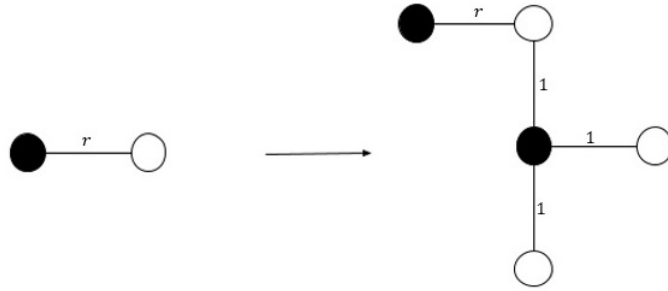


Figura 2.2: [2]

Observación 2.1.1. Si X es simplemente conexo, entonces la operación $O1$ no cambia el grupo fundamental.

Lema 2.1.2. Sea $X \in \mathcal{E}$ trivalente tal que Γ_X es un árbol con todos sus vértices blancos con etiqueta 0, todos los vértices terminales son blancos, y todas las aristas tienen etiqueta 1. Entonces Γ_X puede construirse a partir de cualquier $w \in \mathcal{B}_X$ ejecutando sucesivamente $O1$.

Dem.

Sea $w \in \mathcal{B}_X$. Si $\Gamma = \Gamma_X$ consiste de un solo w , entonces no hay nada que mostrar. Por vacuidad el lema es verdadero si Γ_X tiene solo un vértice negro.

Sea b un vértice negro incidente a w , como X es trivalente y todas sus aristas tienen etiqueta 1, entonces b tiene grado 3. Así, eliminando b y sus tres aristas incidentes de Γ , obtenemos tres subgráficas Γ' , Γ'' , Γ''' que satisfacen las condiciones del lema y con menos vértices negros que Γ . Denotemos por w' , w'' , w''' los tres vértices blancos adyacentes a b , donde $w' = w \in \Gamma'$, $w'' \in \Gamma''$ y $w''' \in \Gamma'''$. Por inducción en el número de vértices negros, Γ' es obtenido de w por repetidas aplicaciones de la operación $O1$. Ahora apliquemos $O1$ a w para volver a poner b son sus tres aristas y vértices w'' y w''' , luego aplique una secuencia de $O1$'s a w' y w'' para engullir Γ'' y Γ''' .

□

Los bloques para la construcción de las gráficas etiquetadas trivalentes de las estratificies 1-conexas son llamadas $b12$ -árbol y $b11$ -árbol.

Definición 2.1.3. (1) El árbol bipartito que consiste de un vértice negro incidente a tres aristas cada una de etiqueta 1 y tres vértices blancos terminales cada uno de género cero, lo denotaremos por $b111$.
(2) El árbol bipartito que consiste de un vértice negro incidente a dos aristas uno de etiqueta 1, el otro de etiqueta 2, y dos vértices blancos terminales de género 0, lo denotaremos por $b12$.

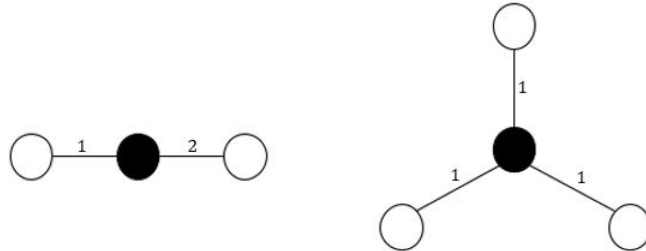


Figura 2.3: [2]

Teorema 2.1.4. Sea X una estratificación trivalente tal que cada arista de Γ_X tiene etiqueta 1. Entonces las siguientes son equivalentes:

- (1) $\pi_1(X) = 1$.
- (2) Γ_X es un árbol con todos los vértices blancos con etiqueta cero y todos los vértices terminales son blancos.
- (3) Γ_X puede ser construido de la gráfica $b111$ por repetidas aplicaciones de la operación $O1$.

Dem.

Suponiendo que se cumple (1), entonces en virtud del corolario 1.2.5 y el teorema 1.2.9 se sigue que (2) se cumple. Por lo tanto, (1) implica (2).

Mostraremos que (2) implica (3). Tenemos que X es trivalente y cada arista de Γ_X tiene etiqueta 1, se sigue que cada $b \in \mathcal{N}_X$ tiene grado 3, por lo que Γ_X contiene al menos una subgráfica $b111$ ψ con un vértice blanco w el cual es un vértice terminal de Γ_X . Ahora, procederemos por inducción sobre el número de vértices negros de Γ_X , si este número es 1, entonces Γ_X es ψ y no hay nada que hacer, así que podemos suponer que Γ_X tiene al menos dos vértices negros. Sea b el vértice negro y w', w'' los otros vértice blanco de ψ . Elimina las aristas de ψ junto con b y w divide Γ_X en dos subgráficas $\Gamma_{X'}$ y $\Gamma_{X''}$, cada uno con menos vértices negros que Γ_X y $w' \in \Gamma_{X'}$, $w'' \in \Gamma_{X''}$. Ahora X' y X'' satisface las condiciones del Lema 2.1.2. Por inducción, $\Gamma_{X'}$ es obtenido de ψ por repetidas aplicaciones de la operación $O1$. Una operación más $O1$ (comenzando en w') añade ψ a $\Gamma_{X'}$ y por el Lema 1 podemos añadir $\Gamma_{X''}$ realizando repetidas operaciones $O1$, empezando en w'' .

Finalmente (3) implica (1): la gráfica $b11$ es simplemente conexa y por la observación 2.1.1, la operación $O1$ no cambia el grupo fundamental. □

2.2. Construyendo gráficas

Para cada $X_1, X_2 \in \mathcal{E}$, definimos la operación $O1_{(X_1, X_2)}^* : \mathcal{B}_{X_1} \times \mathcal{B}_{X_2} \longrightarrow \mathcal{G}$ como $O1_{(X_1, X_2)}^*(v_1, v_2) = \Gamma_X$, donde;

- $V(\Gamma_X) = V(\Gamma_{X_1}) \cup V(\Gamma_{X_2}) \cup \{b, u\}$ y $u, b \notin V(\Gamma_{X_1}) \cup V(\Gamma_{X_2})$

- $A(\Gamma_X) = A(\Gamma_{X_1}) \cup A(\Gamma_{X_2}) \cup \{\{v_1, b\}, \{v_2, b\}, \{b, u\}\}$
- Coloreamos u con blanco y b con negro y a las aristas $\{v_1, b\}, \{v_2, b\}, \{b, u\}$ las etiquetamos con 1.

Tomando $\Gamma_1 = \Gamma_{X_1}$ y $\Gamma_2 = \Gamma_{X_2}$, la operación $O1_{(X_1, X_2)}^*$ gráficamente es:

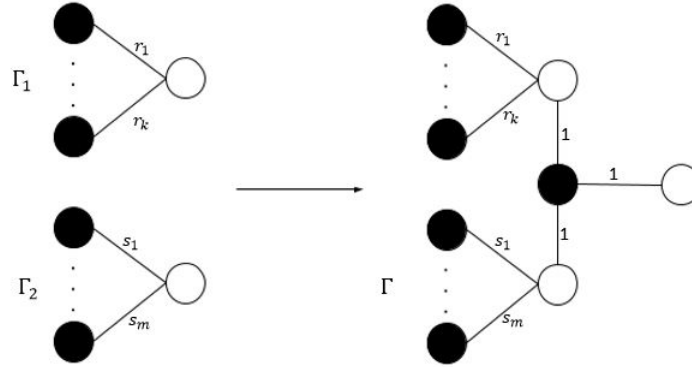


Figura 2.4: [2]

Proposición 2.2.1. Sean $X_1, X_2, X \in \mathcal{E}$. Si $\Gamma_X = O1_{(X_1, X_2)}^*(v_1, v_2)$ con $v_i \in \mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$, entonces $\pi_1(X) = \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$.

Dem.

Sean $X_1, X_2, X \in \mathcal{E}$ tal que $\Gamma_X = O1_{(X_1, X_2)}^*(v_1, v_2)$ con $v_i \in \mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$.

De la definición de $O1_{(X_1, X_2)}^*$ se sigue que X es obtenido de X_1 y X_2 indentificando un disco en X_1 con un disco en X_2 , y esto es homotópicamente equivalente a $X_1 \vee X_2$, por lo tanto

$$\pi_1(X) = \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2).$$

□

Por simplicidad, a veces denotaremos la operación anterior simplemente como $O1^*$.

Ahora, para cada $X \in \mathcal{E}$ definamos la operación $O2_X : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathcal{G}$ como $O2_X(v) = \Gamma_Y$, donde;

- $V(\Gamma_Y) = V(\Gamma_X) \cup \{b, u\}$ y $u, b \notin V(\Gamma_X)$
- $A(\Gamma_Y) = A(\Gamma_X) \cup \{\{v, b\}, \{b, u\}\}$
- Coloreamos u con blanco y b con negro y a las aristas $\{v, b\}, \{b, u\}$ las etiquetamos con 2 y 1, respectivamente.

La operación $O2_X$ gráficamente es:

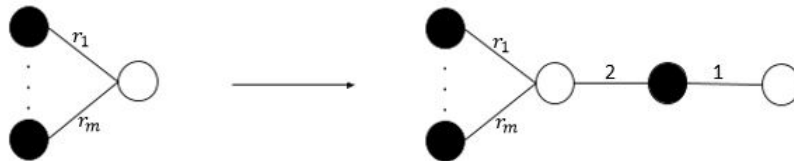


Figura 2.5: [2]

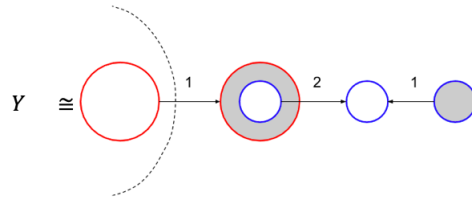
Proposición 2.2.2. Sean $X, Y \in \mathcal{E}$. Si $\Gamma_Y = O2_X(v)$, entonces $\pi_1(Y) = \pi_1(X)$.

Dem.

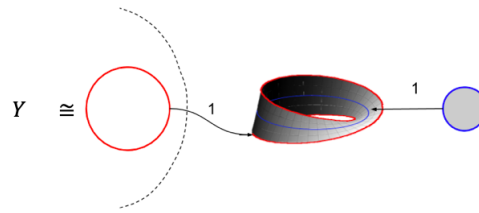
Sean $X, Y \in \mathcal{E}$ tal que $\Gamma_Y = O2_X(v)$ con $v \in \mathcal{B}_X$.

En X , la operación $O2_X(v)$ lo que hace es remover $B \in \tau_{r_X^{-1}(v)}$ tal que $B \cong \text{int}(\mathbb{D}^2)$ y a través de ahí se hace el pegado.

Apliquemos Van Kampen para probar lo que queremos. Con esta finalidad tomemos $U = X \setminus B'$, donde $B' \in \tau_{r_X^{-1}(v)}$, $B' \cong \text{int}(\mathbb{D})$ y $B' \setminus B = \text{Anillo}$, entonces podemos representar a Y como sigue:



Que equivale a:



La banda de *Möbius* y el disco conforman un espacio con grupo fundamental trivial, por tanto, usando Van Kampen, se tendrá inmediatamente que $\pi_1(Y) = \pi_1(X)$.

□

A veces por simplicidad a la operación $O2_X$ simplemente lo denotaremos por $O2$.

Ahora describamos la colección Θ de todas las gráficas trivalentes que se pueden obtener de un solo vértice blanco aplicando sucesivamente las operaciones $O1$ y $O2$.

Para una colección \mathcal{C} de una gráfica etiquetada bipartita denota por $\hat{\mathcal{C}}$ la colección de todas gráficas etiquetadas compactas y conexas obtenidos al comenzar con cualquier $\Gamma_0 \in \mathcal{C}$ y aplicando sucesivamente las operaciones $O1$ o $O2$. Expresamos esto como

$$\hat{\mathcal{C}} = \{\emptyset, \Gamma_0 \xrightarrow{\mathcal{O}^1} \dots \xrightarrow{\mathcal{O}^m} \Gamma : \Gamma_0 \in \mathcal{C}, \mathcal{O}^i = O1 \text{ o } O2; m \geq 0\}$$

Sea \circ denota (la colección que contiene solamente) la gráfica que consiste de un vértice blanco y sea $\Theta_0 = \hat{\circ}$.

Para dos gráficas bipartitas conectadas Γ y Γ' denotamos por $\Gamma \perp \Gamma'$ una gráfica obtenida al unir cualquier vértice blanco de T a cualquier vértice blanco de T' mediante la operación $O1^*$. Note que hay nn' de tales $\Gamma \perp \Gamma'$, donde n (respectivamente n') es el número de vértices blancos de Γ (respectivamente Γ').

Sea

$$\Theta_0 \perp \Theta_0 = \{\Gamma \perp \Gamma' : \Gamma, \Gamma' \in \Theta_0\}$$

En particular, $\Theta_0 \perp \emptyset = \Theta_0$ y $\emptyset \perp \emptyset = \emptyset$.

Sea $\Theta_1 = \widehat{\Theta_0 \perp \Theta_0}$, y inductivamente $\Theta_{n+1} = \widehat{\Theta_n \perp \Theta_n}$

Entonces,

$$\Theta_0 \subset \Theta_1 \subset \dots \Theta_n \subset \dots \subset \Theta := \bigcup_{i=0}^{\infty} \Theta_i$$

Teorema 2.2.3. *Sea X una estratificie trivalente. Entonces X es simplemente conexa si y solo si $\Gamma_X \in \Theta$.*

Dem.

Si $\Gamma_X \in \Theta$, entonces $\pi_1(X) = 1$ por las proposiciones 2.2.1, 2.2.2 y la observación 2.1.1.

Supongamos que $\pi_1(X) = 1$. Si Γ_X no tiene vértices negros o tiene exactamente un vértice negro, entonces $\Gamma_X \in \Theta$. En cualquier otro caso Γ_X es un árbol con todos los vértices blancos de género 0 y todos los vértices terminales son blancos. Además por el lema 1.4.1, Γ_X contiene un vértice terminal w incidente con arista e de etiqueta 1. Sea b el vértice negro incidente a e . Entonces la estrella de b en Γ_X es una gráfica $b12$ o una gráfica $b111$. En el primer caso, $\text{star}(b)$ tiene dos aristas e, e' donde e' tiene etiqueta 2. La subgráfica Γ'_X obtenida de Γ_X al eliminar $w \cup b \cup e \cup e'$ es simplemente conexa por la proposición 2.2.2. Por inducción sobre el número de vértices negros se tiene que $\Gamma'_X \in \Theta$ y ya que Γ_X es obtenida de Γ'_X por la operación $O2$, se sigue que $\Gamma_X \in \Theta$.

En el segundo caso, $\text{star}(b)$ tiene tres aristas e, e', e'' , cada una con etiqueta 1. Las subgráficas Γ'_X y Γ''_X obtenidas de Γ_X eliminando $w \cup b \cup e \cup e' \cup e''$ son simplemente conexas por la proposición 2.2.1. Por inducción, Γ'_X y Γ''_X están en Θ y ya que Γ_X es obtenida de Γ'_X y Γ''_X mediante la operación $O1^*$, se sigue que $\Gamma_X \in \Theta$.

□

En la demostración del siguiente teorema, proporcionamos un algoritmo eficiente para decidir si una estratificie trivalente es o no 1-conexa.

Teorema 2.2.4. *Hay un algoritmo para determinar si una estratificie trivalente X es 1-conexa.*

Dem.

Por el corolario 1.2.5 y el teorema 1.2.9, Γ_X debe ser un árbol, todos sus vértices blancos tienen género 0 y todos los vértices terminales son blancos.

Paso (1) para cada subgráfica lineal $\{\{u, b\}_2, \{b, w\}_1\}$ de Γ_X con $w \in \mathcal{F}(\Gamma_X)$ eliminamos b y w de Γ_X . Aplicamos lo anterior a la gráfica resultante y así sucesivamente mientras sea posible.

El grupo fundamental de X no cambia.

Paso (2) si hay un vértice de rama negro b con un vecino terminal (blanco), elimine b y sus aristas.

Esto divide a Γ_X en dos subgráficas Γ_1 y Γ_2 correspondientes a dos subcomplejos Y_1 y Y_2 de X tal que $\pi_1(X) = \pi_1(Y_1) * \pi_1(Y_2)$. Entonces $\pi_1(X) = 1$ si y solo si $\pi_1(Y_1) = 1$ y $\pi_1(Y_2) = 1$.

Repita los pasos (1) y (2) mientras sea posible para las componentes Y_i . Entonces, o bien Y tiene todos los bordes terminales de etiqueta 2 o el proceso produce una colección de vértices blancos. En el primer caso $\pi_1(Y_i) \neq 1$ por el lema 1.4.1 y por lo tanto $\pi_1(X) \neq 1$. En el segundo caso $\pi_1(X) = 1$.

□

Finalmente damos una clasificación de las estratificies trivalentes simplemente conexas.

Teorema 2.2.5. *Una estratificie trivalente es 1-conexa si y solo si $H_1(X; \mathbb{Z}_6) = 0$*

Dem.

Note que la condición es equivalente a que $H_1(X; \mathbb{Z}_2) = 0$ y $H_1(X; \mathbb{Z}_3) = 0$. La primera condición por el corolario 1.2.5 y el teorema 1.2.9 (a), (b) implica que Γ_X es un árbol con todos sus vértices blancos de género 0. Dado que Γ_X es trivalente, para un vértice terminal negro T , tendríamos un epimorfismo. $H_1(X; \mathbb{Z}_3) \rightarrow H_1(\hat{T}; \mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3$, el cual es imposible por la segunda condición. Por lo tanto, todos los vértices son blancos. Siguiendo el algoritmo, notamos que el paso (1) la \mathbb{Z}_2 -homología no cambia y en el paso (2), $H_1(X; \mathbb{Z}_2) = H_1(Y_1; \mathbb{Z}_2) \oplus H_1(Y_1; \mathbb{Z}_2)$. Así terminamos con una gráfica (posiblemente desconexa) sin aristas. Esto implica que $\pi_1(X)$ es un producto libre de grupos triviales, es decir, $\pi_1(X) = 1$.

□

2.3. Un teorema de clasificación

Teorema 2.3.1. *Una estratificación trivalente y conexa X , es simplemente conexa si y solo si su gráfica Γ tiene las siguientes propiedades:*

Γ es un árbol con todos sus vértices blancos de género 0 y todos sus vértices terminales blancos tal que la componente de $\Gamma - st(B)$ son $(2, 1)$ -árboles colapsables y la gráfica reducida $R(\Gamma)$ no contiene árboles con cuernos, esto es, que no tiene una subgráfica que sea un árbol con cuernos.

Para mayor comodidad, aquí presentamos la definición de los términos utilizados en este teorema.

B denota la unión de todos los vértices negros de grado 3 de Γ y $st(B)$ es la estrella (abierta) de B en Γ .

Un árbol con raíz o un árbol enraizado es un árbol en el que un vértice en particular se designa como raíz.

Los árboles con raíz se representan de forma tal, que el vértice raíz se coloca encima de los restantes, los cuales se sitúan por niveles según su distancia a la raíz.

Un $(2, 1)$ -árbol colapsable es un árbol bicolorado construido de la siguiente manera:

Comencemos con un árbol enraizado T (que puede constar de un solo vértice) con raíz r , coloreemos con blanco y etiquete con 0 los vértices de T , tomemos la subdivisión baricéntrica $sd(T)$ de T , coloreemos con negro los nuevos vértices (el baricentrico de las aristas de T) finalmente etiquetemos una arista e de $sd(T)$ con 2 (respectivamente con 1) si la distancia de e a la raíz r es par (respectivamente impar). Permitimos un árbol de un solo vértice (con un vértice blanco) como un $(2, 1)$ -árbol colapsable.

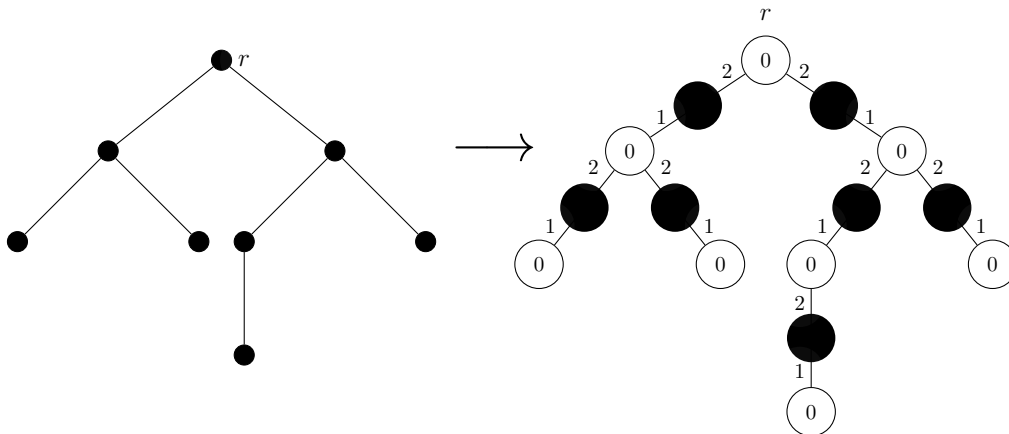


Figura 2.6: Ejemplo $(2, 1)$ -árbol colapsable

Una subgráfica reducida $R(\Gamma)$ es definida a partir de un árbol etiquetado bicolorado Γ para el cual las componentes de $\Gamma - st(B)$ son $(2, 1)$ -árboles colapsables. Es la gráfica obtenida de $St(B)$ (la estrella cerrada de B) uniéndose a cada vértice blanco w de $St(B)$ una gráfica b12 tal que la arista terminal tiene la etiqueta 2, y w no es una raíz de alguna componente de $\Gamma - st(B)$.

Finalmente, un árbol con cuernos es un árbol bicolorado, construido de la siguiente manera:

Empecemos con un árbol T que tiene al menos dos aristas y todos sus vértices no terminales tienen grado tres. Coloreamos un vértice de T con blanco (respectivamente con negro) si tiene grado 1 (respectivamente 3). Triseca las aristas terminales de T y bisecta las aristas no terminales, obteniendo la gráfica H_T . Colorea los vértices adicionales v tal que H_T es bipartita, esto es, v es coloreado con negro si v es vecino de un vértice terminal de H_T y blanco en otro caso. Entonces, etiqueta las aristas tal que cada arista terminal tenga etiqueta 2, cada arista no terminal tiene etiqueta 1.

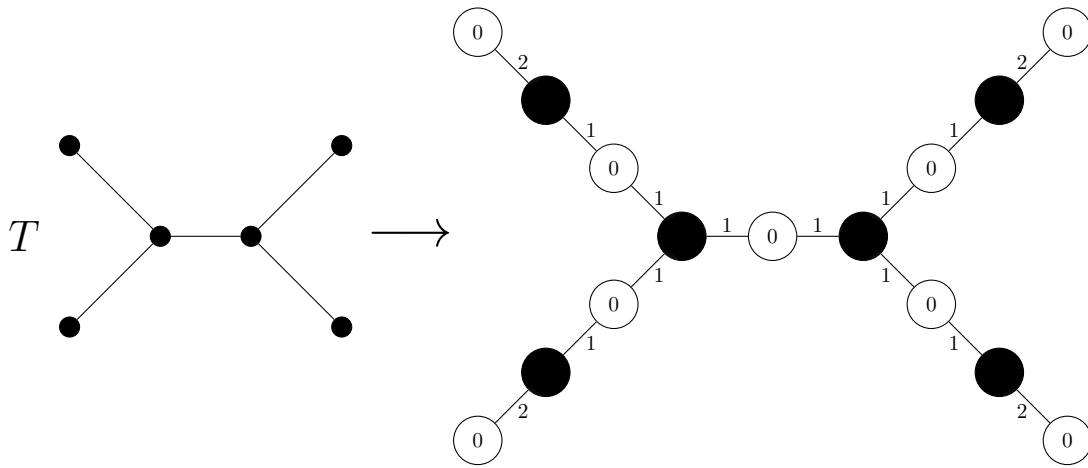


Figura 2.7: Ejemplo gráfica con cuernos

Capítulo 3

Una clasificación de las estratificies con grupo fundamental \mathbb{Z}_2

El objetivo de este capítulo es demostrar un teorema de clasificación de cualquier estratificie trivalente con grupo fundamental \mathbb{Z}_2 . Para cada $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, Mb_k representará la banda de Möbius con k agujeros y $Mb_0 = Mb$.

En la siguiente proposición S_g representa la superficie cerrada de género g .

Proposición 3.0.1. *Sea $X \in \mathcal{E}$ con $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (1) Γ_X es un árbol.
- (2) Para cada $v \in \mathcal{F}(\Gamma_X)$, $v \in \mathcal{B}_X$.
- (3) Existe a lo más un vértice $v \in \mathcal{B}_X$ con género $g \neq 0$.

Dem.

Sea $X \in \mathcal{E}$ con $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2$.

- (1) Por el corolario 1.2.5, se sigue que Γ_X es un árbol.
- (2) Dado que $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2$, entonces $H_1(X) = \mathbb{Z}_2$. Por el teorema 1.2.9 inciso (b) se sigue que:

$$\forall v \in \mathcal{F}(\Gamma_X), v \in \mathcal{B}_X.$$

- (3) Sean $v_1, v_2 \in \mathcal{B}_X$ y sean $g_1 = g(r_X^{-1}(v_1))$, $g_2 = g(r_X^{-1}(v_2))$. En virtud del teorema 1.2.8 se tiene que existe $\phi : \pi_1(X_\Gamma) \rightarrow \pi_1(S_{g_1}) * \pi_1(S_{g_2})$ epimorfismo.

Dado que $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2$, entonces $\pi_1(S_{g_1}) * \pi_1(S_{g_2}) \in \{1, \mathbb{Z}_2\}$.

De manera que $\pi_1(S_{g_1}) = 1$ y $\pi_1(S_{g_2}) = \mathbb{Z}_2$ ó $\pi_1(S_{g_1}) = \mathbb{Z}_2$ y $\pi_1(S_{g_2}) = 1$. En particular, $g_1 = 0$ ó $g_2 = 0$ es cero.

Dado que v_1 y v_2 son arbitrarios, se concluye que existe a lo más $v \in \mathcal{B}_X$ con género $g \neq 0$.

□

Si $X \in \mathcal{E}$ con $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2$ y existe $v \in \mathcal{B}_X$ tal que $0 \neq g = g(r_X^{-1}(v))$, en virtud de la proposición anterior inciso (3) se tiene que v es único. La siguiente interrogante que surge es ¿cuánto vale g ?

Proposición 3.0.2. *Sea $X \in \mathcal{E}$ con $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2$. Si existe $v \in \mathcal{B}_X$ con $g = g(r_X^{-1}(v)) \neq 0$, entonces*

- (a) v es único.
- (b) $g = -1$
- (c) $r_X^{-1}(v) \cong Mb_k$, para algún $k \in \mathbb{N}_0$.

Dem.

Sea $X \in \mathcal{E}$ con $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2$ y $v \in \mathcal{B}_X$ con $g = g(r_X^{-1}(v)) \neq 0$.

- (a) De la proposición 3.0.1 inciso (3) se sigue que v es único.
- (b) De la parte (3) de la demostración previa (Proposición 3.0.1) se sigue que $\pi_1(S_g) = \mathbb{Z}_2$. Ahora, S_g es superficie cerrada, entonces en virtud del teorema de clasificación de superficies cerradas se sigue que $S_g = \mathbb{P}^2$. En consecuencia, $g = -1$.
- (c) Dado que $S_g = \mathbb{P}^2$, entonces al quitarle al menos un disco es exactamente Mb posiblemente agujerada.

$$\therefore r_X^{-1}(v) \cong Mb_k, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}_0.$$

□

Suponiendo que existe $X \in \mathcal{E}$ con $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2$, $v \in \mathcal{B}_X$ tal que $0 \neq g = g(r_X^{-1}(v))$, por la parte (c) de la proposición 3.0.1 hemos respondido la interrogante ¿cuál es el valor g ? cuya respuesta es $g = -1$. Ahora, nos preguntamos ¿existe tal $X \in \mathcal{E}$? Para responder esta pregunta consideremos los siguientes ejemplos:

■ **Ejemplo 3.0.3.** *Consideremos los siguientes conjuntos $X^1 = \mathbb{D}^2$, $X^2 = \mathbb{D}^2$, $X^3 = Mb$ y S^1 . Sabemos que existen homeomorfismos $\phi_i : \partial X^i \rightarrow S^1$, $i = 1, 2, 3$. Ahora, sea $Y := (\bigsqcup_{j=1}^3 X_j) \sqcup S^1$ y definamos la*

siguiente relación \sim en Y

- (I) *Para cada $y \in \text{int}(Y) \cup S^1$, $y \sim y$.*
- (II) *Para $i \in \{1, 2, 3\}$, cada $y \in X^i$, $y \sim \phi_i(y)$.*

Tomemos $X := Y / \sim$. Por construcción se sigue inmediatamente que X es estratificie, más aún $X_1 = [S^1] = \{[x] : x \in S^1\}$ y $X_2 = X \setminus X_1 = \bigsqcup_{j=1}^3 \text{int}(X_j)$, de manera que la gráfica asociada a X es:

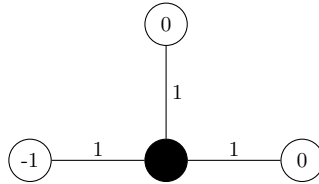


Figura 3.1: Γ_X

Por otro lado, claramente X_1 es homeomorfo a S^1 y ∂X^2 es contractible (homotópica a un punto) en X , en consecuencia X es homotópicamente equivalente a $\mathbb{P}^2 \vee S^2$.

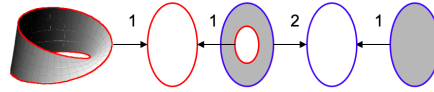
$$\therefore \pi_1(X) = \pi_1(\mathbb{P}^2) * \pi_1(S^2) = \mathbb{Z}_2.$$

■ **Ejemplo 3.0.4.** Sea X la estratificie asociada a la siguiente gráfica:

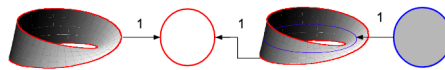


Figura 3.2: Γ_X

X tiene una representación de la siguiente manera:



Que equivale a:



Sin contar el disco final, la figura previa nos representa la botella de Klein \mathbb{K} y sabemos que $\pi_1(\mathbb{K}) = \langle x, y : x^2y^2 = 1 \rangle$ y lo que hace el disco final es matar el generador de la segunda banda de Möbius. En consecuencia,

$$\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2.$$

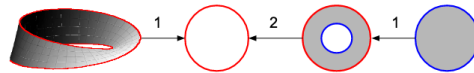
Los ejemplo previos muestran estratificies cuyas gráficas tienen un solo vértice de género -1 y el resto tienen género 0 y sus grupos fundamentales son \mathbb{Z}_2 , sin embargo, no todas las estratificies trivalentes con un único vértice de género -1 y el resto 0 tienen su grupo fundamental igual \mathbb{Z}_2 , el siguiente ejemplo muestra lo afirmado:

■ **Ejemplo 3.0.5.** Sea X la estratificie asociada a la siguiente gráfica:



Figura 3.3: Γ_X

X tiene una representación de la siguiente manera:



Que equivale a:



Sea α el corazón de la primera banda de Möbius, es decir, el generador de su grupo fundamental. Sabemos que la segunda banda de Möbius con el disco final, es exactamente \mathbb{P}^2 , y que el corazón β de la segunda banda de Möbius es el generador de $\pi_1(\mathbb{P}^2)$. En base a la ilustración previa claramente $\alpha \neq \beta$ y por Van Kampen se sigue que:

$$\pi_1(X) = \langle \alpha, \beta : \beta^2 = 1, \alpha^2 = \beta \rangle.$$

Dado que $1, \alpha, \beta \in \pi_1(X)$, se concluye que $\pi_1(X) \neq \mathbb{Z}_2$, pues $\alpha \neq \beta$.

Consideremos los siguientes conjuntos:

- $\mathcal{W} = \{X \in \mathcal{E} : \pi_1(X) \in \{1, \mathbb{Z}_2\}\}$
- $\mathcal{T} := \{X \in \mathcal{W} : X \text{ es trivalente}\}$
- Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{T}_k := \{X \in \mathcal{T} : |\mathcal{N}_{\Gamma_X}| = k\}$

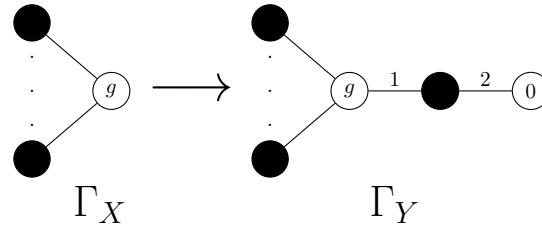
Observación 3.0.6. *Claramente,*

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_k^{\infty} \mathcal{T}_k$$

Ahora, para cada $X \in \mathcal{E}$ definamos la operación $O3_X : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathcal{G}$ como $O3_X(v) = \Gamma_Y$, donde:

- $V(\Gamma_Y) = V(\Gamma_X) \cup \{b, w\}$, $b, w \notin V(\Gamma_X)$
- $A(\Gamma_Y) = A(\Gamma_X) \cup \{\{v, b\}, \{b, w\}\}$
- b es negro y w es blanco de género 0 y a las aristas $\{v, b\}$, $\{b, w\}$ tienen etiqueta 1 y 2, respectivamente.

La operación $O3_X$ gráficamente es:



A veces por simplicidad a la operación $O3_X$ simplemente lo denotaremos por $O2$.

A la operación $O3_X(v)$ la llamaremos *poner un cuerno a Γ_X a través de v* .

Observación 3.0.7. *Sea $X \in \mathcal{E}$ y $v \in \mathcal{B}_X$. Si $S = r_X^{-1}(v)$ y $\Gamma_{X'} = O3_X(v)$, entonces existe B vecindad abierta en X tal que $\overline{B} \subset S$, $B \cong \text{int}(\mathbb{D}^2)$ y*

$$X' = (X \setminus B) \sqcup \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{D} / [(x \sim f(x), \forall x \in \sigma) \wedge (x \sim g(x), \forall x \in \partial\mathbb{D}^2)], \text{ donde:}$$

- $\sigma = \partial B \cong \mathbb{S}^1$.
- $f : \sigma \rightarrow \mathbb{S}^1$ es un homeomorfismo.
- $g : \partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, dada por $g(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$.

Teorema 3.0.8. *Dado $X \in \mathcal{W}$ y $v \in \mathcal{B}_X$. Si $\Gamma' = O3_X(v)$ y $X' = X_{\Gamma'}$, entonces:*

- (I) *Si $\pi_1(X) = 1$, entonces $\pi_1(X') \in \{1, \mathbb{Z}_2\}$*

(II) Si $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2$, entonces $\pi_1(X') \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2\}$

Dem.

Consideremos la notación y a X' como en la observación 3.0.7. Sea $Y = X \setminus B$.

Apliquemos Van Kampen a X' :

Sean $U, V \in \tau_{X'}$ tales que U es homotópica a Y y V es homotópica a \mathbb{P}^2 , $U \cap V \cong (0, 1) \times S^1$. tenemos que $\pi_1(U) = \pi_1(Y)$, $\pi_1(V) = \pi_1(\mathbb{P}^2) = \langle [x] : [x]^2 = 1 \rangle$ y $\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z}$.

Obsérvese que a $\pi_1(Y)$ esta constituido por los generadores de $\pi_1(X)$ y sus relaciones, y a lo más se agrega un generador, con las respectivas relaciones, y en caso de agregar un generador, este generador debe ser $[\sigma]$.

Ahora, consideremos $i_U : U \cap V \hookrightarrow U$ y $i_V : U \cap V \hookrightarrow V$ por Van Kampen se tiene que:

$\pi_1(X') = \langle \text{generadores de } \pi_1(Y), [x] : \text{relación de los generadores de } \pi_1(Y), [x]^2 = 1 \text{ y } i_{U*}([\alpha]) = i_{V*}([\alpha]), \forall [\alpha] \in \pi_1(U \cap V) \rangle = \langle \text{generadores } \pi_1(Y), [x] : \text{relación de los generadores de } \pi_1(Y), [x]^2 = 1 \text{ y } [\sigma] = [x] \rangle$.

Tenemos dos casos:

(I) $\pi_1(X) = 1$. En este caso tendremos que

$$\pi_1(X') = \langle [\sigma], [x] : [x]^2 = 1, [\sigma] = [x] \rangle = \langle [\sigma] : [\sigma]^2 = 1 \rangle.$$

Por lo que si $[\sigma] = 1$, entonces $\pi_1(X') = 1$ en otro caso $\pi_1(X') = \mathbb{Z}_2$.

(II) $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2$. Sea $[\tau]$ el generador de grupo fundamental de X , esto es, $[\tau] \neq 0$ y $[\tau]^2 = 1$, entonces

$$\pi_1(X') = \langle [\tau], [\sigma], [x] : [\tau]^2 = 1, [x]^2 = 1, [\sigma] = [x] \rangle = \langle [\tau], [\sigma] : [\tau]^2 = 1, [\sigma]^2 = 1 \rangle.$$

Claramente $[\tau] \neq [\sigma]$, pues si $[\tau] = [\sigma]$, entonces $[\tau] = 0$, pues en X $[\sigma] = 0$. Por tanto, si $[\sigma] = 1$, entonces $\pi_1(X') = \mathbb{Z}_2$, en caso contrario $\pi_1(X') = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Esto prueba lo deseado. □

Corolario 3.0.9. Sea $X \in \mathcal{W}$ y sea $v \in \mathcal{B}_X$. Si perforamos X a través de v , y denotamos como Y al espacio obtenido, entonces $\pi_1(Y) = \pi_1(X)$ si y solo si la frontera de la perforación es contraíble.

Lema 3.0.10. Para cada $X \in \mathcal{W}$ si Γ_X tiene un cuerno, entonces existen $Y \in \mathcal{W}$, $v \in \mathcal{B}_Y$ tales que $O3_Y(v) = \Gamma_X$.

Dem.

Sea $X \in \mathcal{W}$ tal que Γ_X tiene un cuerno.

Tomemos $b \in \mathcal{N}_X$, $v, u \in \mathcal{B}_X$ tal que $\{v, b\}, \{b, u\} \in A(\Gamma_X)$ y $\{v, b\}$ tiene etiqueta 1, $\{b, u\}$ tiene etiqueta 2, es decir, conforman un cuerno de X . Consideremos la gráfica $\Gamma' = \Gamma_X - b - u$ (cuando quitamos vértices, también se quitan las aristas incidentes en ellas).

Por lo visto en el capítulo 1, se sigue que $\pi_1(X_{\Gamma'})$ es un cociente de $\pi_1(X)$, en consecuencia

$$\pi_1(X_{\Gamma'}) \in \mathcal{W} \quad \text{y} \quad O3_{X_{\Gamma'}}(v) = \Gamma_X.$$

□

Definición 3.0.11. Sea X_1 y X_2 las estratificies de los ejemplos 3.0.3 y 3.0.4 , respectivamente. A las estratificies X_1, X_2, b_{111} y b_{12} les llamaremos semillas.

Teorema 3.0.12. Para todo $X \in \mathcal{T}$, X es una semilla ó construible mediante las operaciones $O1, O1^*, O2, O3$.

Dem.

En virtud de la observación 3.0.8, usaremos inducción sobre los vértices negros para probar lo deseado.

Sea $\Sigma = \{k \in \mathbb{N} : \text{Para todo } X \in \mathcal{T}_k, \Gamma_X \text{ es semilla ó es construible mediante } O1, O1^*, O2, O3\}$

(a) Sea $X \in \mathcal{T}$ tal que $|\mathcal{N}_{\Gamma_X}| = 1$. En este caso tenemos que X es semilla.

$$\therefore 1 \in \Sigma$$

(b) Supongamos que $\{1, \dots, k\} \subset \Sigma$.

P.D. que $k+1 \in \Sigma$.

Sea $X \in \mathcal{T}_{k+1}$. Por las proposiciones 3.0.1, 3.0.1 sabemos que existe a lo más $v \in \mathcal{B}_X$ con $g(r_X^{-1}(v)) = -1$. Y dado que Γ es un árbol, entonces $|\mathcal{F}(\Gamma_X)| > 1$. Así, sea $u \in \mathcal{F}(\Gamma_X)$ tal que $g(r_X^{-1}(u)) = 0$.

Sea $b \in \mathcal{N}_X$ tal que $\{b, u\} \in A(\Gamma_X)$.

Como X es trivalente, tenemos 3 casos:

Caso-1: En b inciden 3 aristas. Así sean $x, y \in \mathcal{B}_X$ tal que $\{x, b\}, \{y, b\} \in A(\Gamma_X)$ y $\{x, b\}, \{y, b\}, \{b, u\}$ tiene etiqueta 1.

Así, consideremos la gráfica $G = (V(G), A(G))$, donde;

$$\begin{aligned} V(G) &= \{x, y, b, u\} \\ A(G) &= \{\{x, b\}, \{y, b\}, \{b, u\}\} \end{aligned}$$

G es subgráfica de Γ_X .

Tomemos $\Gamma' = (V(\Gamma_X) \setminus \{b, u\}, A(\Gamma_X) \setminus A(G))$. Dado que Γ_X es un árbol, entonces Γ' tiene exactamente dos componentes conexas, sean G_1, G_2 sus componentes conexas.

De manera que Γ_X se obtiene de G_1, G_2 , mediante la operación $O1^*$, en consecuencia, $\pi_1(X) = \pi_1(X_{G_1}) * \pi_1(X_{G_2})$, y dado que $\pi_1(X) \in \{1, \mathbb{Z}_2\}$, entonces $\pi_1(X_{G_1}), \pi_1(X_{G_2}) \in \{1, \mathbb{Z}_2\}$.

Por hipótesis de inducción se sigue que $\Gamma_{X_{G_1}}, \Gamma_{X_{G_2}}$ son semillas o construibles mediante $O1, O1^*, O2, O3$ por último aplicamos la operación $O1^*$ a G_1 con G_2 , para obtener Γ_X .

Por lo tanto, Γ_X es una semilla o es construible mediante $O1, O1^*, O2, O3$.

Caso – 2 : En b inciden 2 aristas y $\{b, u\}$ tiene etiqueta 1 . Dado que X es trivalente, entonces existe $x \in \mathcal{B}_X$ tal que $\{x, b\} \in A(\Gamma_X)$ y $\{x, b\}$ tiene etiqueta 2.

Así, consideremos la gráfica $G = (V(G), A(G))$, donde;

$$\begin{aligned} V(G) &= \{x, b, u\} \\ A(G) &= \{\{x, b\}, \{b, u\}\} \end{aligned}$$

G es subgráfica de Γ_X .

Consideremos $\Gamma' = (V(\Gamma_X) \setminus \{b, u\}, A(\Gamma_X) \setminus A(G))$.

Como $O2_{X_{\Gamma'}}(x) = \Gamma_X$, por la proposición 2.2.2 se sigue inmediatamente que $\pi_1(X_{\Gamma'}) \in \{1, \mathbb{Z}_2\}$, pues $\pi_1(X) \in \{1, \mathbb{Z}_2\}$. Por hipótesis de inducción se sigue que Γ' es una semilla o construible mediante $O1, O1^*, O2, O3$.

Por lo tanto, Γ_X es una semilla o es construible mediante $O1, O1^*, O2, O3$.

Caso – 3 : En b inciden 2 aristas y $\{b, u\}$ tiene etiqueta 2. Dado que X es trivalente, entonces existe $x \in \mathcal{B}_X$ tal que $\{x, b\} \in A(\Gamma_X)$ y $\{x, b\}$ tiene etiqueta 1.

Por el lema 3.0.10 se sigue que existe $Y \in \mathcal{W}$ y $y \in \mathcal{B}_Y$ tal que $O3_Y(y) = \Gamma_X$, claramente $|\mathcal{N}_Y| = |\mathcal{N}_X| - 1$.

Dado que $Y \in \mathcal{W}$, entonces $\pi_1(Y) \in \{1, \mathbb{Z}_2\}$ y por hipótesis inductiva, se sigue que Γ_Y es semilla ó es construible mediante $O1, O1^*, O2, O3$.

En consecuencia, Γ_X es semilla ó es construible mediante $O1, O1^*, O2, O3$.

$$\therefore k + 1 \in \Sigma.$$

De (a), (b) y en virtud del principio de inducción matemática se concluye que $\Sigma = \mathbb{N}$, esto es, para cada $k \in \mathbb{N}$ y para todo $X \in \mathcal{T}_k$ se tiene que X es semilla ó es construible mediante $O1, O1^*, O2$ y $O3$.

□

Estratificies con frontera y espacios espuma

En este capítulo se introducirá el concepto de estratificie con frontera y espacios espuma. Para cada $n \in \mathbb{N}$, K_n denotará la gráfica completa de n vértices, Δ^n denotará el n -simplejo (estándar).

4.1. Estratificies con frontera

Los siguientes conjuntos son importantes en esta sección y en todo este capítulo:

- $\Omega_1 = \bigcup_{n=2}^{\infty} \{\mathbb{R} \times CL^n\}$
- $\Omega_2 = \bigcup_{n=2}^{\infty} \{[0, 1) \times CL^n\}$

Definición 4.1.1. *Una estratificie X con frontera es un espacio topológico segundo numerable, Hausdorff, compacto y conexo tal que para cada $x \in X$ existen $U_x \in \mathring{\mathcal{V}}_x$, y $U \in \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ tales que $U_x \cong U$.*

La frontera de X la denotaremos por ∂X y esta dada por $\partial X := \{x \in X : \text{existe } U \in \Omega_2 \text{ con } U_x \cong U\}$.

Proposición 4.1.2. *Para cada X estratificie con frontera, existe una filtración $\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset X_2 = X$ tal que:*

- (a) X_1 , es una 1-variedad compacta con frontera.
- (b) Para cada $x \in X_1$, existe $U_x \in \mathring{\mathcal{V}}_x$ y $n = n_x \in \mathbb{N}$ tales que $U_x \cong \mathbb{R} \times CL^n$ ó $U_x \cong [0, 1) \times CL^n$ y $n \geq 3$.
- (c) Para cada $x \in X_2 \setminus X_1$ existe $U_x \in \mathring{\mathcal{V}}_x$ tal que $U_x \cong \mathbb{R}^2$ ó $U_x \cong \mathbb{H}$.

Dem.

Sea X una estratificie con frontera y consideremos el siguiente conjunto:

$$X_1 := \{x \in X : \text{existe } U_x \in \mathring{\mathcal{V}}_x, \text{ con } U_x \cong \mathbb{R} \times CL^n \text{ ó } U_x \cong [0, 1) \times CL^n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 3\}$$

(I) Veamos que X_1 es una 1-variedad compacta con frontera. Con este fin, sea $x \in X_1$, existe $U_x \in \mathcal{V}_x$ tal que $U_x \cong B \times CL^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ y $B \in \{\mathbb{R}, [0, 1)\}$.

Sea $\varphi : U_x \longrightarrow B \times CL^n$ un homeomorfismo entre U_x y $B \times CL^n$, denotemos por η el punto de cono de CL^n , claramente $\varphi(U_x \cap X_1) = B \times \{\eta\} \cong B$, por lo tanto, en X_1 , x tiene una vecindad homeomorfa a B , esto es, homeomorfa a \mathbb{R} ó $[0, 1)$. Por lo tanto, X_1 es una 1-variedad con frontera.

(II) Veamos que $X \setminus X_1$ es una 2-variedad con frontera. Con este fin, sea $x \in X \setminus X_1$, por definición de estratificie con frontera y de X_1 , se sigue que existe una vecindad abierta regular $U_x \in \mathcal{V}_x$ tal que $U_x \cong \mathbb{R} \times CL^2 \cong \mathbb{R}^2$ ó $U_x \cong [0, 1) \times CL^2 \cong \mathbb{H}$. Por lo tanto, $X_2 \setminus X_1$ es una 2-variedad con frontera, pues U_x es vecindad abierta para todo sus puntos.

Finalmente para ver que X_1 es compacto, solo tenemos que ver X_1 es cerrado en X , pues por hipótesis X es compacto. Con este fin, sea $\langle x_n \rangle$ una sucesión en X_1 tal que $x_n \longrightarrow x$, $x \in X$. Si $x \in X \setminus X_1$, entonces x tiene una vecindad abierta regular U homeomorfa a \mathbb{R}^2 ó a \mathbb{H} , además U es vecindad abierta de todos sus puntos, es decir, $U \subset X \setminus X_1$, en particular, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ $x_n \in U$ lo cual no es posible pues para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X_1$, por tanto, $x \in X_1$, se sigue que X_1 es cerrado (pues X es segundo numerable). En consecuencia, X_1 es compacto.

Por lo tanto, de (I) y (II) se sigue que $\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset X_2 = X$ es una filtración para X que cumple (a), (b) y (c), es decir, se cumple la veracidad de la proposición.

□

Apartir de aquí para cada X estratificie con frontera la consideraremos con la filtración de la proposición 4.1.2.

Lema 4.1.3. *Sea X una estratificie con frontera, las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

- (1) *Para cada $x \in X_1$, si $B \times CL^n$ es vecindad regular abierta de x en X , entonces x tiene una vecindad regular abierta homeomorfa a B en X_1 , donde $B \in \{\mathbb{R}, [0, 1)\}$.*
- (2) *Si x tiene una vecindad abierta U homeomorfa a \mathbb{R} en X_1 , entonces $B = \mathbb{R}$.*

Dem.

Sea $x \in X_1$, existe U_x , $n = n_x \geq 3$ vecindad regular abierta de x en X tal que $U_x \cong B \times CL^n$ donde $B \in \{\mathbb{R}, [0, 1)\}$. Sea φ el homeomorfismo entre U_x y $B \times CL^n$, y sea ν el punto de cono de CL^n .

Sabemos que para cualquier $y \in B \times CL^n$, si $y \notin B \times \{\nu\}$, entonces y tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R} ó a \mathbb{H} . En consecuencia, $\varphi(x) \in B \times \{\nu\}$. Más aún, $\varphi(U_x \cap X_1) = B \times \{\nu\}$, por tanto $U_x \cap X_1 \cong B \times \{\nu\} \cong B$ y además si $B = [0, 1)$ es claro que $\varphi(x) = \{0\} \times \{\nu\}$. Esto prueba (1).

Para (2) basta con observar que dado que $U \cong \mathbb{R}$, entonces x no es punto frontera de X_1 . Supongamos que B no es \mathbb{R} , entonces $B = [0, 1)$ y por (1), x tiene una vecindad abierta V homeomorfa a $[0, 1)$ en X_1 y además x se identifica con 0, por tanto $V \cap U \cong [0, 1)$ es vecindad abierta de x en X_1 y eso solo ocurre si x es punto frontera de X_1 .

□

Proposición 4.1.4. *Sea X una estratificie con frontera tenemos que:*

- (i) *Para cada $C \in \mathcal{C}(X_1)$, $C \cong S^1$ ó $C \cong I$.*

- (ii) Para cada $C \in \mathcal{C}(X_1)$ con $C \cong I$, existe $N(C) \in \mathcal{V}_C$ regular tal que $N(C) = I \times C(L^n)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$.
- (iii) Para cada $C \in \mathcal{C}(X_1)$ con $C \cong \mathbb{S}^1$ existe $d = d_C \in \mathbb{N}$, $h \in \text{Homeo}(C(L^d), C(L^d))$ y existe $N(C) \in \mathcal{V}_C$ regular, tales que $h|_{L^d \times \{0\}} = \pi \in S_d$, $N(C) \cong N_\pi(C) := C(L^d)_h$.
- (iv) En (iii) si π' es conjugado de π , entonces $N_{\pi'}(C) \cong N_\pi(C)$.

Dem.

(i) Por la proposición 4.1.2 inciso (a) se tiene que X_1 es una variedad con frontera compacta, por lo tanto

$$C \cong S^1 \quad \text{ó} \quad C \cong I.$$

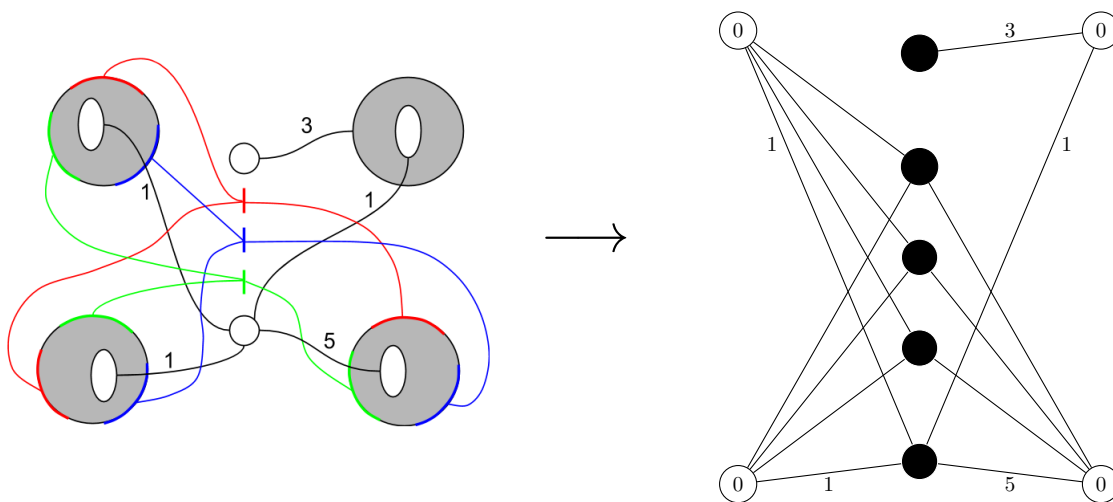
Ahora, sea $C \in \mathcal{C}(X_1)$ y supongamos que $C \cong I$. Tenemos que cada punto en $\text{int}(C)$ tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R} en X_1 , y por el lema 4.1.3 se sigue que para toda $x \in \text{int}(C)$, x tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R} \times CL^n$ en X , para algún $n = n_x \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Para $x \in \partial C$, x tiene una vecindad homeomorfa a $[0, 1)$ en X_1 , y por el lema 4.1.3, x tiene una vecindad homeomorfa a $[0, 1) \times CL^n$ en X , para algún $n = n_x \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. De esta manera, usando argumentos similares a la demostración de la proposición 1.2.2 se obtendrá que la vecindad es homeomorfa a $I \times CL^n$ y no a $\mathbb{R} \times CL^n$.

Finalmente, si $C \cong \mathbb{S}^1$, entonces cada punto en C tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R} en X_1 , y por el inciso (2) del lema 4.1.3 se sigue que para toda $x \in C$, x tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R} \times CL^n$ en X , para algún $n = n_x \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Así, la demostración de (iii) y (iv) es totalmente análoga a la demostración de la proposición 1.2.2.

□

Análogamente como en el primer capítulo, dada una estratificación con frontera X , para cada $C, C' \in \mathcal{C}(X_1)$ podemos tomar vecindades regulares $N(C)$ y $N(C')$ como en la proposición 4.1.4 tal que $N(C) \cap N(C') = \emptyset$. Llamemos a las cerraduras de $N(C) \setminus C$ las hojas de $N(C)$. En base a esto, nosotros podemos asociar una gráfica (bipartita) conexa Γ_X a X , exactamente igual que en el capítulo 1, la diferencia es que ahora un vértice negro representa una curva simple ó un intervalo cerrado y los vértices blancos representan 2-variedades con frontera. Siguiendo la notación del primer capítulo (página 9), note que las superficies con frontera W 's (que son los vértices blancos en este caso) pueden tener fronteras que son libres de un pegado (fronteras libres). Para ilustrar esto consideremos el siguiente ejemplo (gráfico):

■ **Ejemplo 4.1.5.**



Considere a la familia de estratificies con frontera, ¿puede establecerse, proposiciones, lemas, teoremas y corolarios similares a los casos de estratificies con grupo fundamental trivial?

Pregunta 4.1.6. ¿Para cada estratificie con frontera X , Γ_X es un retracto de X ?

Conjetura 4.1.7. Si X es una estratificie con frontera, simplemente conexa, entonces

- (a) Γ_X es un árbol.
- (b) Todos los vértices blancos de Γ_X tienen genero 0, no hay fronteras libres en W 's, y todos los vértices terminales son blancos.

Pregunta 4.1.8. Para el caso de las estratificies con frontera trivalentes, y con grupo fundamental trivial ¿podremos dar un algoritmo que las pueda construir todas?

4.2. Espacios espuma

En esta sección definiremos lo que para nosotros será un espacio n -espuma, con $n \in \mathbb{N}$.

Definición 4.2.1. Sea $X \in Top$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que X es Hausdorff, segundo numerable, compacto y conexo y $n \geq 3$, diremos que X es un espacio n -espuma si es modelado en el 2-esqueleto del n -simplejo, es decir, es localmente homeomorfo a una vecindad regular de un punto en Δ_2^n .

En base a la definición previa, tenemos lo siguiente:

Observaciones 4.2.2. Sea $X \in Top$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ tenemos:

- $\Delta_2^n = \Delta_2^{n-1} \cup C(\Delta_1^{n-1})$.
- Si $n = 3$ y X es una 3-espuma, entonces X es una variedad 2 dimensional sin frontera.
- Si $n = 4$ y X es una 4-espuma, entonces para cada $x \in X$ existe $U_x \in \mathcal{V}_x$ y $U \in \{int(\mathbb{D}^2), \mathbb{R} \times CL^3, CK_4\}$ tales que $U_x \cong U$

Definición 4.2.3. Llamaremos a los espacios 4-espuma simplemente espacios espuma.

En base a las observaciones anteriores, si X es un espacio espuma, entonces para cada $x \in X$ existe $U_x \in \mathcal{V}_x$ y $U \in \{int(\mathbb{D}^2), \mathbb{R} \times CL^3, CK_4\}$ tales que $U_x \cong U$.

Hemos definido lo que es una n -espuma, entonces siguiendo el espíritu del contenido de este documento nos podemos preguntar ¿Podemos dar un algoritmo, que nos clasifique a los espacios n -espuma con grupo fundamental trivial (como en el caso de las estratificies)? Esta pregunta es muy difícil de responder. Sin embargo, en este capítulo se centrará en encaminarnos hacia una posible respuesta solo para el caso de los espacios *espuma*. Con este fin, procedamos a estudiar una familia de los espacios espuma.

4.2.1. Descomposición de Heegaard

Sabemos que las 2-variedades compactas con frontera, orientables o no, se obtienen de las superficies cerradas al remover una cantidad finita de discos abiertos en ellas.

Para las 3-variedades sabemos que hay varias formas de descomponer una 3-variedad como la unión de piezas «simples», y una forma es con descomposiciones de Heegaard [3].

Recordemos que es un cubo con asas.

Definición 4.2.4. Sea H una 3-variedad con frontera y $S_1, \dots, S_n \subset \text{int}(\mathbb{D}^2)$.

(1) Diremos que H es un cubo con 0 asas si $H \cong \mathbb{D}^2 \times I \cong \mathbb{D}^3$.

(2) Diremos que H es un cubo con n asas si $H \cong S \times I$, donde

- $S_j \cong \mathbb{D}^2$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.
- $S_j \cap S_k = \emptyset$, para $j, k \in \{1, \dots, n\}$ con $j \neq k$.
- $S = \mathbb{D}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^n \text{int}(S_j)$.

El *género* de un cubo con asas H lo definimos como el género de la superficie ∂H . Puede probarse que dos cubos con asas son homeomorfos si y solo si tienen el mismo género.

El siguiente teorema es conocido como el *Teorema de Heegaard*, cuya demostración no se hará en este documento y que se sigue del hecho que toda 3-variedad admite una triangulación.

Teorema 4.2.5. (*Teorema de Heegaard*) Sea M una 3-variedad cerrada, conexa y orientable. Existen H_1 y H_2 cubos con asas y $h : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$ homeomorfismo tales que $M = H_1 \sqcup_h H_2$.

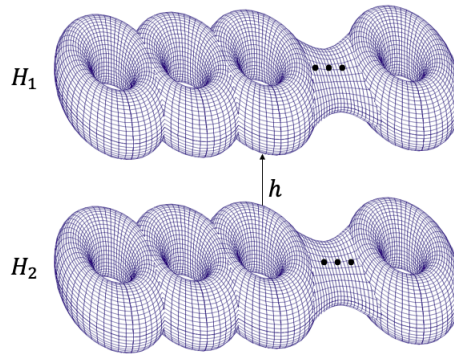


Figura 4.1

En base al teorema previo, definamos lo siguiente:

Definición 4.2.6. Sea M una 3-variedad cerrada, conexa y orientable. En virtud del teorema previo existen H_1 y H_2 cubos con asas y $h : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$ homeomorfismo tales que $M = H_1 \sqcup_h H_2$.

- A la descomposición $M = H_1 \sqcup_h H_2$ (o $M = H_1 \sqcup_S H_2$, donde $S = \partial H_1 = \partial H_2$) se llama descomposición de Heegaard de M .
- $S = \partial H_1 = \partial H_2$ le llamaremos superficie de Heegaard.
- El género de la descomposición es el género de la superficie de Heegaard.
- El género de M es el mínimo género entre todas sus descomposiciones de Heegaard de M .

El siguiente ejemplo muestra \mathbb{S}^3 tiene al menos dos descomposiciones de Heegaard de género 0 y 1.

■ **Ejemplo 4.2.7.** Consideremos a \mathbb{S}^3 . Tenemos que las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- \mathbb{S}^3 es una 3-variedad cerrada, conexa y orientable.
- $\mathbb{S}^3 \cong \mathbb{D}^3 \sqcup_{id_{\partial \mathbb{D}^3}} \mathbb{D}^3$.
- $\mathbb{S}^3 \cong \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \sqcup_{id_{\partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1)}} \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Las afirmaciones son fáciles de verificar. Sin embargo, daré una demostración para la última afirmación.

Con este fin, tenemos:

$$(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 \iff x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \iff z^2 + w^2 = 1 - (x^2 + y^2), (x, y) \in \mathbb{D}^2$$

$$\iff \exists! \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] : x^2 + y^2 = \cos^2(\varphi), z^2 + w^2 = \sin^2(\varphi)$$

$$\iff \exists! \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \phi \in [0, \frac{\pi}{2}] : \begin{cases} x = \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ y = \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ z = \sin(\varphi) \cos(\phi) \\ w = \sin(\varphi) \sin(\phi) \end{cases}$$

En base a lo anterior, tenemos que

$$\Phi : \begin{cases} x = \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ y = \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ z = \sin(\varphi) \cos(\phi) \\ w = \sin(\varphi) \sin(\phi) \end{cases}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta, \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

es una función biyectiva que define completamente a \mathbb{S}^3 . Más aún si $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ es fija, entonces Φ define un toro, y cuando $\varphi = 0$ ó $\varphi = \frac{\pi}{2}$, Φ define los círculos $x^2 + y^2 = 1$ ó $z^2 + w^2 = 1$, respectivamente.

Finalmente, obsérvese que los siguientes conjuntos

- $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 : (x, y, z, w) = \Phi(\varphi, \theta, \phi) \text{ con } \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}] \text{ y } 0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi\}$
- $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 : (x, y, z, w) = \Phi(\varphi, \theta, \phi) \text{ con } \varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \text{ y } 0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi\}$

son homeomorfos a $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ y los dos espacios son identificados a lo largo de la frontera

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 : (x, y, z, w) = \Phi(\frac{\pi}{4}, \theta, \phi) \text{ con } 0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi\} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

y el mapeo que los identifica es el mapeo identidad. Esto prueba lo deseado.

Por el ejemplo 4.2.7 se sigue que en general una misma 3-variedad puede tener distintas descomposiciones de Heegaard.

Observación 4.2.8. Sea H un cubo con asas de género n , existen n discos en H , D_1, \dots, D_n tal que $\partial H_1 - \bigcup_{i=1}^n c_i$ es homeomorfo a una esfera con $2n$ agujeros, y $c_i = \partial D_i$, $i = 1, \dots, n$.

Ahora, sea H_1 y c_1, \dots, c_n como en la observación previa y sea H_2 otro cubo con asas del mismo género y $h : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$ un homeomorfismo: sea $d_i = h(c_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Consideremos $M = H_1 \sqcup_h H_2$ la 3-variedad determinada por h .

Afirmación: Para construir a M , no es necesario conocer toda la imagen de h , basta con conocer las curvas d_1, \dots, d_n .

Para ver lo afirmado, peguemos H_1 y H_2 por partes, o sea, primero le pegamos a H_2 el disco D_1 (o bien, una vecindad regular de D_1), luego D_2 , y así hasta pegar todos los discos D_i . Lo que resta por pegar es el complemento de los discos (o bien, el complemento de vecindades de los discos, lo que es una 3-bola). Ahora, al pegar la 3-bola lo hacemos por su frontera, y puede verse que no importa como sea este pegado, pues las 3-variedades que se obtienen son homeomorfas.

Definición 4.2.9. Sea H un cubo con asas de género n y d_1, d_2, \dots, d_n una colección de curvas ajenas en ∂H , tal que $\partial H - \bigcup d_i$ es una esfera con $2n$ agujeros. A $(H; d_1, d_2, \dots, d_n)$ lo llamaremos un diagrama de Heegaard.

Por la discusión del párrafo anterior se sigue que este diagrama determina una única 3-variedad. Nótese, sin embargo, que una 3-variedad puede tener diferentes diagramas de Heegaard que lo definen, pues por el ejemplo 4.2.7 sabemos que una 3-variedad puede tener diferentes descomposiciones de Heegaard.

Proposición 4.2.10. A partir de un diagrama de Heegaard de una 3-variedad M nosotros podemos calcular una presentación para el grupo fundamental M .

Dem.

Sea (H_1, H_2) una descomposición de Heegaard de M y $(H_2 : d_1, d_2, \dots, d_n)$ el diagrama de Heegaard asociado. Nótese primero que si H_2 es un cubo con asas de género n , entonces $\pi_1(H_2) \cong F(x_1, \dots, x_n)$, el grupo libre de n generadores; esto es porque H_2 es homotópico a la cuña de n círculos, se puede deformar continuamente a dicho espacio. Ahora, al pegar H_1 y H_2 aplicamos el teorema de Van Kampen, pero lo hacemos por partes. Con la elección de un punto base adecuado, podemos expresar cada una de las curvas d_i en términos de los generadores x_1, \dots, x_n de $\pi_1(H_2)$, obteniendo n relaciones r_1, \dots, r_n . Al pegarle el disco d_1 al H_2 como lo hicimos arriba, vemos que la curva d_1 se vuelve trivial, o sea, la relación r_1 es trivial en el grupo del nuevo espacio. Hacemos lo mismo con las curvas restantes, y por el teorema de Seifert-Van Kampen, tenemos que

$$\pi_1(M) \cong \langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_n \rangle.$$

□

4.2.2. Asociando un espacio espuma a una 3-variedad

Antes de iniciar esta parte de este capítulo, recordemos la definición de espacio estratificado.

Definición 4.2.11 ([7]). *Diremos que $X \in \text{Top}$ es un espacio estratificado n -dimensional si existe una filtración $\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \cdots \subset X_n = X$ tal que:*

- (a) *Para cada $i \in \{-1, 0, 1, \dots, n-1\}$, X_i es cerrado.*
- (b) *Para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ y cada $x \in X_i \setminus X_{i-1}$ existen $U_x \in \mathcal{V}_x$, L espacio estratificado compacto $(n-i-1)$ -dimensional, y un homeomorfismo que preserva la filtración tales que $U_x \cong \mathbb{R}^i \times CL$.*

Si $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $X_i \setminus X_{i-1}$ se llama el estrato i -dimensional. Y a las componentes conexas de $X_i \setminus X_{i-1}$ también se les denomina con frecuencia estratos.

Teorema 4.2.12. *Para cada 3-variedad M cerrada, conexa y orientable existe Y espacio estratificado 2-dimensional tal que:*

- (i) *Y determina completamente a M .*
- (ii) $\pi_1(M) = \pi_1(Y)$.
- (iii) *Y es un espacio espuma.*

Dem.

Sea M una 3-variedad cerrada y conexa, en virtud de lo discusión previa, sea $H_1 \sqcup_h H_2 = M$ una descomposición de Heegaard de M , $g(\partial H_i) = n$; $i = 1, 2$ y $h : \partial H_2 \rightarrow \partial H_1$ homeomorfismo.

Para $i = 1, 2$, sea $\{D_i^1, \dots, D_i^n\}$ una colección de discos cerrados 2-dimensionales como en la figura 4.2; tenemos que para $i = 1, 2$, $\mathring{B}_i = H_i - \left(\partial H_i \cup \bigcup_{j=1}^n D_i^j \right) \cong \text{int}(\mathbb{D}^3)$.

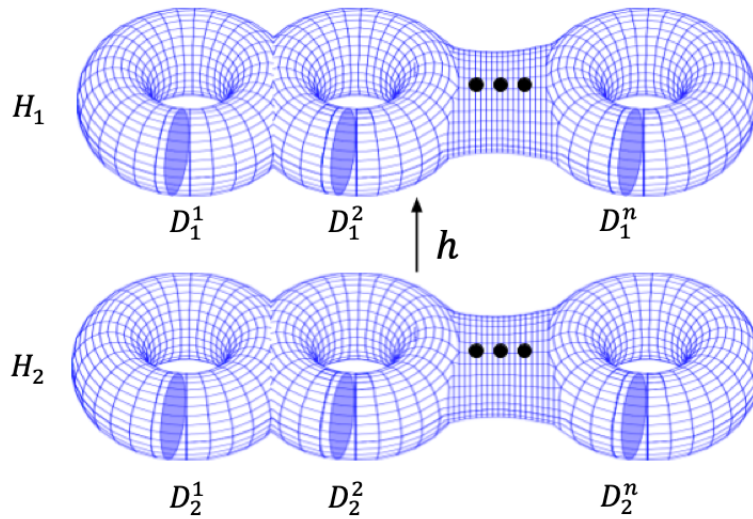


Figura 4.2

Tomemos $Y := M - \bigcup_{i=1}^2 \overset{\circ}{B}_i$.

Dado que h es un homeomorfismo, entonces Y puede ser descrito como

$$\left(\partial H_1 \cup \bigcup_{j=1}^n D_1^j \right) \cup_h \left(\bigcup_{j=1}^n D_2^j \right).$$

Por lo discutido en el apartado de descomposiciones de *Heegaard* se sigue inmediatamente que Y determina completamente a M . Finalmente, Y es un espacio estratificado 2-dimensional tal que $\pi_1(M) \cong \pi_1(Y)$. Probemos la última afirmación: En virtud de la prueba de la proposición 4.2.10 se sigue inmediatamente que $\pi_1(M) \cong \pi_1(Y)$. Ahora, Consideremos la siguiente filtración de Y :

$$\emptyset = Y_{-1} \subset Y_0 = \left(\bigcup_{j=1}^n \partial D_1^j \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^n \partial D_2^j \right) \subset Y_1 = \left(\bigcup_{j=1}^n \partial D_1^j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^n \partial D_2^j \right) \subset Y_2 = Y$$

(a) Claramente Y_{-1}, Y_0, Y_1 y Y_2 son subespacios de Y cerrados.

(b) Tenemos que para cada $p \in Y_0 \setminus Y_{-1} = Y_0$, p tiene una vecindad regular V_p en Y como en la Figura 4.3

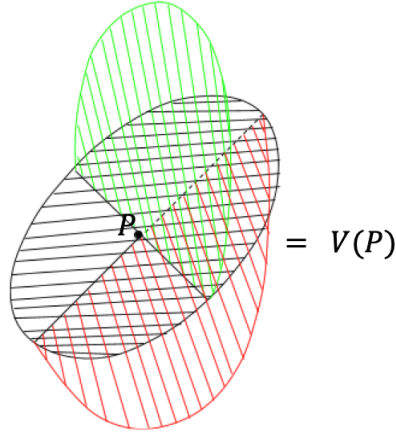


Figura 4.3

es decir, $V_p \cong CK_4$, donde K_4 es como en la Figura 4.4

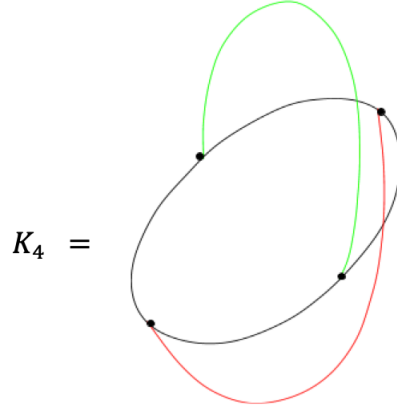


Figura 4.4

Y para cada $y \in Y_1 \setminus Y_0$, y tiene una vecindad regular V_y en y homeomorfa a $\mathbb{R} \times CL^3$.

Por último, cada $y \in Y_2 \setminus Y_1$, y tiene una vecindad regular U_y homeomorfa a \mathbb{R}^2 .

Por tanto, Y es un espacio estratificado 2-dimensional que determina completamente a M y $\pi_1(M) = \pi_1(Y)$ y claramente Y es un espacio espuma. □

Sea M una 3-variedad cerrada y conexa, sea $H_1 \sqcup_h H_2 = M$ una descomposición de Heegaard de M , $g(\partial H_i) = n$; $i = 1, 2$ y $h : \partial H_2 \rightarrow \partial H_1$ homeomorfismo. Para $i = 1, 2$, sea $\{D_i^1, \dots, D_i^n\}$ una colección de discos cerrados 2-dimensionales como en la figura 4.2, y sea Y el espacio estratificado 2-dimensional que determina a M tal como en el teorema 4.2.12. En virtud de lo escrito en la demostración del Teorema 4.2.12 se sigue que las siguientes afirmaciones se cumplen:

Afirmaciones 4.2.13. (Usando la misma notación)

- (0) Y es un espacio espuma.
- (1) Para cada $y \in Y_0$ existe $U_y \in \mathcal{V}_y$ tal que $U_y \cong CK_4$.
- (2) $X = Y - \bigcup_{p \in Y_0} (\text{vecindad regular abierta de } p \text{ en } Y)$ es una estratificie trivalente con frontera.

Observación 4.2.14. Claramente;

$$\pi_1\left(\partial H_1 \cup \bigcup_{j=1}^n D_1^j\right) = \text{Grupo libre de rango } n, \text{ además } \left(\partial H_1 \cup \bigcup_{j=1}^n D_1^j\right) = \left(Y - \bigcup_{j=1}^n D_2^j\right).$$

Dado una X como una observación 4.2.14 inciso (2), podemos asociarle una gráfica a X , Γ_X , como ya se ha descrito en la sección de estratificies con frontera. El siguiente ejemplo ilustra todo lo escrito hasta este momento de esta sección.

■ **Ejemplo 4.2.15.** Sean H_1 y H_2 cubos con asas de género 3 y para cada $i = 1, 2$ sea $\{D_i^1, D_i^2, D_i^3\}$ discos encajados en H_i . Sea $M = H_1 \sqcup_h H_2$ y $h : \partial H_2 \rightarrow \partial H_1$ homeomorfismo con $h(c_j) = b_j$, $j = 1, 2, 3$ donde $c_j = \partial D_2^j$ todo descrito como en la figura 4.5.

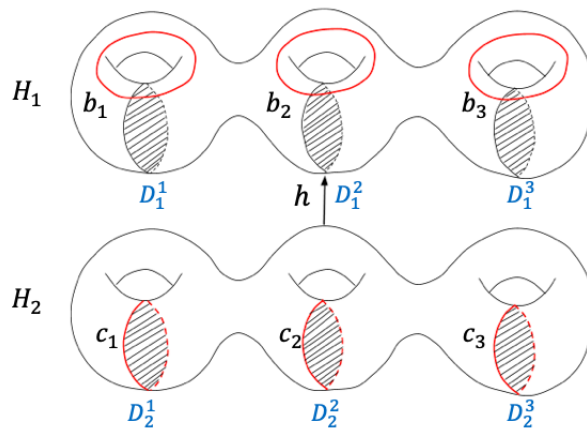
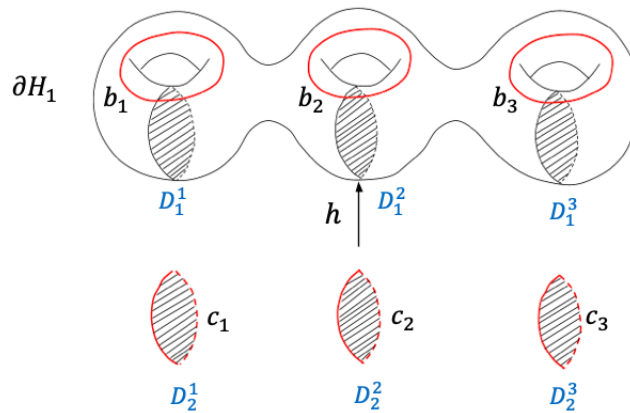


Figura 4.5

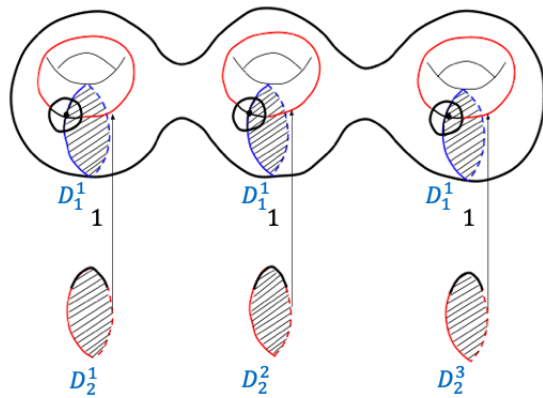
Sea Y el espacio estratificado 2-dimensional que determina M . Sabemos que Y es descrito como

$$\left(\partial H_1 \cup \bigcup_{j=1}^3 D_1^j\right) \cup_h \left(\bigcup_{j=1}^3 D_2^j\right).$$

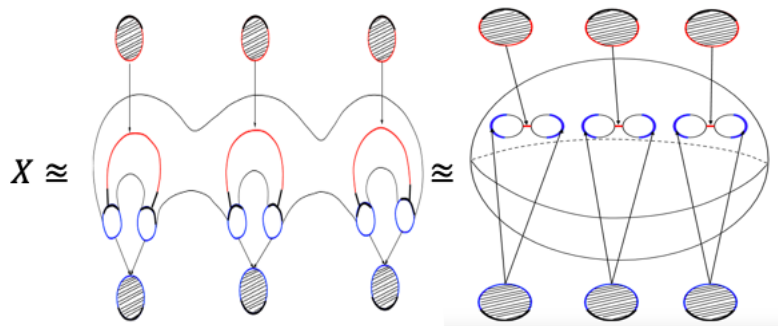
Gráficamente tenemos:



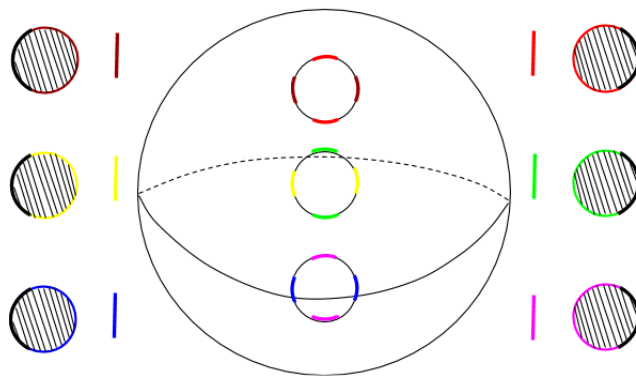
Ahora, se X como observación 4.2.14 inciso (2) (en este caso particular), esto es;



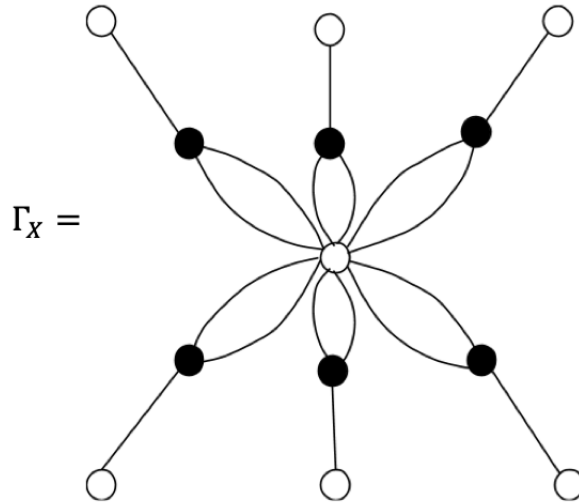
Removiendo a lo largo de las curvas frontera de los discos D_1^j y luego de las rojas se tiene lo siguiente:



Ahora, en la siguiente imagen las curvas de cada color diferentes de negro se pegan, de manera que X es homeomorfo a la siguiente imagen:



Finalmente, la gráfica asociada a X es:



Ahora supongamos que $\pi_1(M) = 1$. Tomemos X como en la afirmación 4.2.13 inciso (2), esto es:

$$X = Y - \bigcup_{p \in Y_0} (\text{Vecindad regular abierta de } p \text{ en } Y)$$

es una estratificie trivalente con frontera y todas las componentes conexas de la frontera de X son homeomorfos a K_4 (ver Figura 4.4).

Propiedades de Γ_X

- i) Todos los vértices blancos de Γ_X tiene género 0.
- ii) Todos los vértices terminales de Γ_X son blancos.
- iii) Se puede suponer que todos los vértices negros provienen de segmentos cerrados (no de curvas cerradas). Esto es porque X se obtiene de Y removiendo vecindades regulares abiertas de los puntos de Y_0 .

Nos preguntamos: para estas estratificies (con frontera) muy específicas ¿podemos clasificarlas? ¿Podemos dar un algoritmo computacional que nos produzcan todas?

4.2.3. Grapumas

Definición 4.2.16. Sea $G \in \text{Top hausdorff}$, diremos que G es una **grapuma** si $X = V(G) \cup A(G)$, donde $V(G)$ y $A(G)$ cumplen lo siguiente:

- Para cada $C \in \mathcal{C}(V(G))$, C es homeomorfo a un punto ó a \mathbb{D}^2 . Si C es homeomorfo a un punto lo llamaremos **vértice negro** y si $C \cong \mathbb{D}^2$ lo llamaremos **d-vértice (disco-vértice) blanco**.
- $A(G) = G \setminus V(G)$ y cada $e \in \mathcal{C}(A(G))$, $e \cong (0, 1)$ y $\bar{e} \cong [0, 1]$.
- Para cada $e \in A(G)$, e tiene un extremo en un vértice negro y otro en la frontera de un d-vértice blanco.

Identificaremos a G con el par $(V(G), A(G))$.

Sea $\mathcal{F} := \{F : F \text{ es un espacio espuma que viene de un diagrama de Heegaard de una 3-variedad orientable}\}$.

Si $F \in \mathcal{F}$, entonces;

- $F = S \cup \bigcup_{i=1}^n D_i \cup \bigcup_{j=1}^n E_j$, donde V_1 es un cubo con n asas y $S = \partial V_1$.
- $X_0 = \left(\bigcup_{i=1}^n \partial D_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^n \partial E_j \right)$.
- $X = F - V(X_0)$, donde $V(X_0) = \bigcup_{x \in X_0} U_x$, $U_x \cong CK_4$.

Ver figura 4.6. X es una estratificie con tantas componentes frontera como $|X_0|$ y cada componente es homeomorfo al CK_4 .

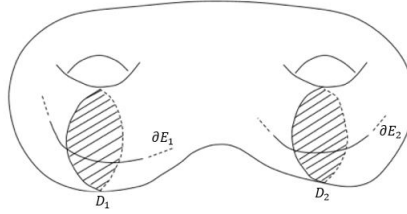


Figura 4.6: $n = 2$

Podemos asumir que $\left(\bigcup_{i=1}^n \partial D_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^n \partial E_j \right) - V(X_0)$ es una colección disjunta de intervalos cerrados

$I = \{I_j\}_{j=1}^m$. Cortando X a lo largo de I , nos da una colección de $\{W_i\}_{i=1}^k$ de superficies con frontera conexas, compactas y orientables, obsérvese que $n \leq k$.

Podemos asumir que $W_i = D'_i$, $W_{n+i} = E'_i$, $i = 1, \dots, n$ donde;

- $D'_i = D_i - V(X_0)$; $i = 1, \dots, n$
- $E'_i = E_i - V(X_0)$; $i = 1, \dots, n$

es decir, cada D'_i, E'_i es un disco mordido, ver Figura 4.7

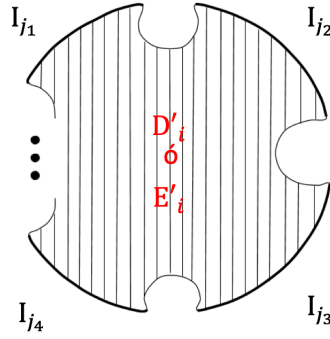


Figura 4.7

Para desarrollar la teoría puede asumirse que todos los W_i son discos mordidos.

Sea $F \in \mathcal{F}$, y considerando la misma notación de esta sección, asociaremos una grapuma a F , como sigue:

- Cada I_j es un vértice negro b_j .
- Cada W_j es un d-vértice blanco w_i
- Aristas: añadir una arista $e(w_i, b_j)$ para cada I_j contenido en W_i . El orden en que llegan las aristas es importante.

Así, tomamos $G_F = (V(G_F), A(G_F))$. A G_F le llamaremos la grapuma asociada a F .

Observaciones 4.2.17. Para X tenemos que:

- (1) X es trivalente.
- (2) Si todos los W_i 's son homeomorfos a \mathbb{D}^2 , entonces $\Gamma \hookrightarrow X$ y X es homotópicamente equivalente a Γ , es decir, $\pi_1(X)$ es un grupo libre.

Ahora, sea F un espacio espuma que viene de un diagrama de Heegaard de una 3-variedad orientable, es decir;

$$F = S \cup \bigcup_{i=1}^n D_i \cup \bigcup_{j=1}^n E_j, \text{ donde } V_1 \text{ es un cubo con } n \text{ asas y } S = \partial V_1.$$

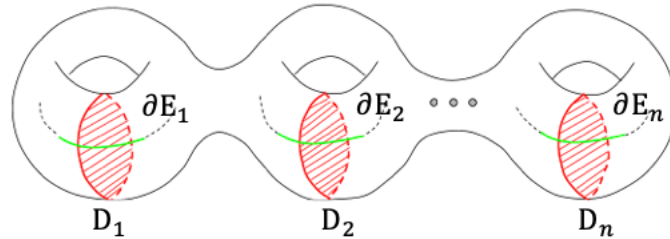


Figura 4.8

Sea $W = S$ cortado a lo largo de $\bigcup_{i=1}^n \partial D_i$, ver Figura 4.9

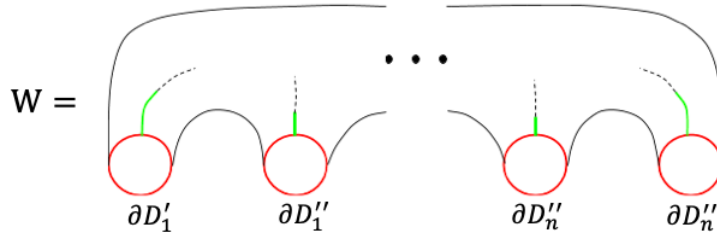


Figura 4.9

W es 2-esfera con $2n$ agujeros y $\partial W = \bigcup_{i=1}^n (\partial D'_i \cup \partial D''_i)$. Sea $P = (\bigcup_{i=1}^n \partial D_i) \cap (\bigcup_{j=1}^n \partial E_j)$ colección de puntos en S , y sea $A_i =$ la unión de arcos contenido de ∂E_i cortando a lo largo de P ; $i = 1, \dots, n$. Sean C_1, \dots, C_m las componentes de $\partial W \cup \bigcup_{i=1}^n A_i$ en W . Note que $m \leq n$.

■ Ejemplo 4.2.18.

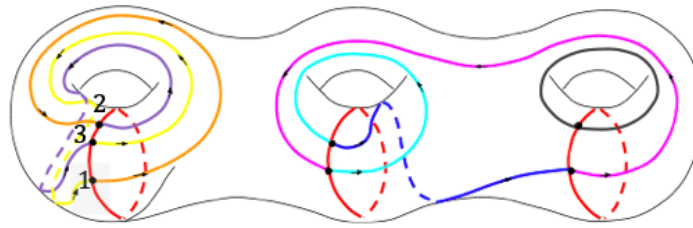


Figura 4.10

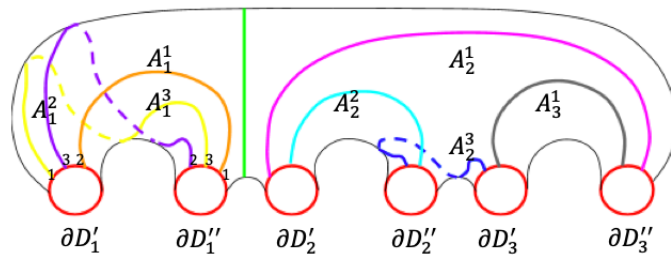


Figura 4.11

En el ejemplo previo:

- $C_1 = \partial D'_1 \cup \partial D''_1 \cup A_1$
- $C_2 = \partial D'_2 \cup \partial D''_2 \cup \partial D'_3 \cup \partial D''_3 \cup A_2 \cup A_3$

Lema 4.2.19. Hay $m - 1$ discos 2-dimensionales F_j disjuntos, propiamente encajados en V_1 cortado a lo largo de D_i ; $i = 1, \dots, n$ (=una 3-bola B^3 con $2n$ discos $\{D'_i, D''_i\}$ contenido en ∂B^3) tal que $\bigcup_{j=1}^{m-1} \partial F_j \cap$

$(\bigcup_{i=1}^n (D'_i \cup D''_i) \cup \bigcup_{i=1}^m C_i) = \emptyset$ y B^3 cortado a lo largo de las F_j 's es $\{B^3\}_{i=1}^m$ bolas y cada una contiene exactamente un C_i .

Observación 4.2.20. Por el lema, $M = M_1 \# \dots \# M_m$.

Corolario 4.2.21. Cada M_i tiene una descomposición de Heegaard con una sola componente C_i .

Lema 4.2.22. Si $\partial W \cup \bigcup_{i=1}^n A_i$ es conexo, entonces F cortado a lo largo $\mathcal{C} = (\bigcup_{i=1}^n \partial D_i \cup \bigcup_{i=1}^n \partial E_i)$ es una colección de W_i ; $i = 1, \dots, k$ tal que $W_i \cong \mathbb{D}^2$.

Observación 4.2.23. Como $\pi_1(M) = *_{i=1}^m \pi_1(M_i)$ con el fin de averiguar si $\pi_1(M) = 1$, nosotros podemos asumir que $\partial W \cup \bigcup_{i=1}^n A_i$ es conexo y por lo tanto F cortado a lo largo \mathcal{C} es una colección de W'_i 's, cada una es un disco cerrado 2-dimensional.

Corolario 4.2.24. Sea $X = F - \bigcup_{p \in P} \overset{\circ}{V}(p)$ donde, $P = (\bigcup_{i=1}^n \partial D_i) \cap (\bigcup_{i=1}^n \partial E_i)$.

(Note que X es una estratificación trivalente con frontera, cada componente es homeomorfa a un cono (1-esqueleto de Δ^3)).

Ahora cortamos X a lo largo $\mathcal{C} \cap X$ y obtenemos $\bigsqcup_{i=1}^k W_i$ donde W_i es un disco cerrado 2-dimensional; $i = 1, \dots, k$. Entonces,

- 1) $\Gamma_X \hookrightarrow X$ (Γ_X es la gráfica de X).
- 2) Γ_X es homotópicamente equivalente a X .

Como consecuencia $\pi_1(X)$ es libre.

Siguiendo el ejemplo 4.2.18, F_1 se indica como un segmento verde en la figura 4.11 y $M = M_1 \# M_2$ en este caso el diagrama de Heegaard de M_1 es:

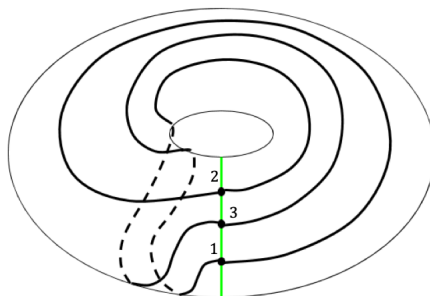


Figura 4.12

En [6] se desarrolla un algoritmo que primero recupera un diagrama de Heegaard de una presentación del grupo fundamental de una 3-variedad cerrada, conexa y orientable. Y como segundo paso le asocia a este diagrama una gráfica como se ha discutido en este capítulo.

Conclusión

En el trabajo de José Carlos Gómez Larrañaga en colaboración con Francisco González Acuña y Wolfgang Heil ([1], [2]) nos dan una clasificación de las estratificies trivalentes con grupo fundamental trivial y nos proporcionan un algoritmo para construirlas todas con esa propiedad. Este trabajo considera básicamente el mismo problema de clasificación, pero en el caso en que las estratificies tienen como grupo fundamental \mathbb{Z}_2 . Aquí describimos un método para encontrar todas las estratificies trivalentes con grupo fundamental \mathbb{Z}_2 , y siguiendo el espíritu del trabajo de los personajes antes mencionados damos un teorema de clasificación para este caso. Sin embargo; la pregunta general ¿podemos clasificar las estratificies en términos de sus gráficas asociadas? Sigue abierta.

En el capítulo 4 introducimos nuevos conceptos tales como estratificies con frontera y espacios espuma, y al igual que las estratificies nos podemos plantear las mismas interrogantes ¿podremos clasificarlas? Para cada espacio ¿podemos dar un algoritmo que nos produzcan todas? Estas preguntas al igual que en el caso de las estratificies son difíciles de responder.

En conclusión los espacios tratados y mencionados en este documento son un nicho abierto en la investigación matemática.

Bibliografía

- [1] Gómez-Larrañaga, J. C.; González-Acuña, F.; Heil, Wolfgang *2-dimensional stratifolds. A mathematical tribute to Professor José María Montesinos Amilibia, 395–405, Dep. Geom. Topol. Fac. Cien. Mat. UCM, Madrid, 2016.*
- [2] Gómez-Larrañaga J. C.; González-Acuña, F.; Heil, Wolfgang ; Hernández-Esparza, Y.A. *Models of Simply-connected Trivalent 2-dimencional Stratifolds With an Implementation Code*, arXiv:1805.06302.
- [3] Hempel, John, *3-Manifolds. Ann. of Math. Studies, No. 86. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1976.*
- [4] Michael, E. *Collared Sets, in General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proc. Symp. Prague 270–271, 1962.*
- [5] Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces, Annals of Mathematics Studies, no.16 Princeton University Press, 1969*
- [6] Santa Cruz Baur, Hannah . *Foams to Graphs: explanation of an algorithm, preprint 2019.*
- [7] Weinberger, Shmuel *The topological classification of stratified spaces. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.*